

DS n°2

I Sommes et sommes doubles

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes (sous réserve que n soit suffisamment grand pour qu'elles aient un sens), en précisant bien à chaque fois la formule utilisée (somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique, somme quadratique ou cubique, somme télescopique, etc.) :

1.
$$\sum_{k=3}^{n-1} (3k-1)$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n+1} k+n$$

3.
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^k}$$

4.
$$\sum_{k=1}^{n+2} \frac{3^{k-1}}{2^4}$$

5.
$$\sum_{k=2}^{n-1} (1-x)^{3k}$$

6.
$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-1)^k}{(x+1)^{-k}}$$

7.
$$\sum_{k=1}^{n+2} (k+1)^5 - k^5$$

8.
$$\sum_{k=3}^{n-1} \cos(2k+1) - \cos(2k-1)$$

9.
$$\sum_{k=0}^n (k+3)^2$$

10.
$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^n \cdot n^k$$

11.
$$\sum_{k=1}^{n-3} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

12.
$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 4^k$$

13.
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$$

14.
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

15.
$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

16.
$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$$

17.
$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

18.
$$\sum_{k=2}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}$$

19.
$$\sum_{k=0}^n k(k+1)(k+2)$$

Indications :

— pour la 5 et la 6, on pourra procéder par disjonction de cas suivant la valeur de x ;

— pour la 12, on pourra considérer aussi $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1}$;

— pour la 13 et la 14, on pourra séparer la somme suivant la parité des indices.

Exercice 2

On fixe $n, m \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes pour $n = 1$, puis en donner une expression générale en fonction de n :

1.
$$\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} k+l$$

2.
$$\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} 2k$$

3.
$$\sum_{1 \leq k < l \leq n} kl$$

4.
$$\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \frac{k}{l}$$

5.
$$\sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \binom{l}{k} 2^l$$

6.
$$\sum_{0 \leq k, l \leq n} \binom{n+1}{k} l^k$$

7.
$$\sum_{k=0}^n k \cdot 3^k$$

8.
$$\sum_{0 \leq k, l \leq n} \min(k, l)$$

9.
$$\sum_{0 \leq k, l \leq n} |k-l|$$

II Produits

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les produits suivants (sous réserve que n soit suffisamment grand pour qu'ils aient un sens), en détaillant bien les étapes de calcul :

$$1. \prod_{k=1}^{n+1} 5k$$

$$2. \prod_{k=2}^{n-1} 2k^2$$

$$3. \prod_{k=1}^n (2k+1)$$

$$4. \prod_{k=1}^n 3^{3k+1}$$

$$5. \prod_{k=1}^n 3^{n-k}$$

$$6. \prod_{k=1}^n k(k+1)$$

$$7. \prod_{k=3}^{n-2} \frac{k}{k+1}$$

$$8. \prod_{k=1}^n 7^{k^2}$$

$$9. \prod_{k=1}^n (9k^2 - 1)$$

III Systèmes

Exercice 4

Résoudre les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 3x - 6y + z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 5y - 2z = -1 \end{cases} ;$$

$$2. \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases} ;$$

$$3. \begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases} ;$$

$$4. \begin{cases} x - y - z = -7 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 4x + y + 2z = 4 \end{cases} .$$

Exercice 5

Discuter suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ des solutions des systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y = a^2 \\ x - y + 3z = a^3 \end{cases} ;$$

$$2. \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases} ;$$

$$3. \begin{cases} x + 2z = 4 \\ 2x + ay + 4z = 8 - a \\ -x - ay + (a^2 - 3a - 2)z = 2a - 4 \end{cases} .$$