DS n^{o}1 : erreurs

I Erreurs générales

1. La plupart des remarques du DM1 restent valables.
2. Beaucoup de phrases n'ont pas de sens. Souvent, elles sont écrites avec des symboles mathématiques, et mériteraient d'être écrites en français pour ce rendre compte de la situation.
3. Les raisonnements ne sont pas assez explicités : beaucoup de raisonnements classiques (récurrence, absurde, analyse–synthèse, disjonction de cas) débutent directement, sans même préciser ce que l'on fait.
4. La rédaction est d'autant plus gênante pour l'analyse–synthèse : l'analyse repose sur le fait qu'on part d'une solution au problème posé, et qu'on lui trouve certaines contrainte. Il faut donc préciser que l'on part d'une solution.
5. Les équivalences sont rarement justifiées : c'est gênant en soi, car cela nuit à la clarté ; mais c'est d'autant plus problématique quand les équivalences invoquées sont fausses (ce qui aurait été évité en cherchant à les vérifier).
6. On a parfois besoin d'équivalents, et les exercices sont traitées avec des équivalences, mais ceux-ci n'apparaissent pas dans les conclusions : des phrases comme "l'égalité est vérifiée lorsque $x = \dots$ " ou "pour $x = \dots$" ne donnent qu'une implication (que "si $x = \dots$, alors x est solution de l'équation"). Il faut écrire "si, et seulement si" pour présenter l'équivalence dans la conclusion.
7. C'était écrit sur l'énoncé, et cela avait été dit : les exercices se veulent progressifs. Il est un peu étrange de croire que les dernières questions des exercices se traitaient très rapidement et simplement.
8. Les formulations des questions aident parfois à trouver les réponses. C'était notamment le cas :
   - pour l'exercice 4 : la question 4 est sous forme d'une question ouverte, donc on peut se dire que le résultat peut varier (voir explications plus loin) ;
   - pour l'exercice 6 : si l'assertion A était vraie, il n'y aurait absolument aucun intérêt à la question 5. C'est donc que l'assertion A est fausse, donc B est vraie. Et aussi que, dans la question 5, on a absolument besoin d'utiliser la propriété générale vérifiée par f (le fait que, pour tout réel x, $|f(x)| = |x|$ ne suffit pas, sinon l'assertion A serait vraie).
9. Il faut se relire : dans beaucoup de copies, on peut lire des phrases qui n'ont pas de sens, ou pas le bon. Les conclusions sont là comme un aboutissement d'un raisonnement, elles doivent donc être cohérentes avec ce qui a été fait avant (alors qu'elles disent parfois des choses très différentes, ce qui relève une démonstration incomplète), et surtout donner explicitement la réponse à la question posée dans l'énoncé (et il est donc important de se relire, mais aussi de relire la question, au moment de donner la réponse finale).
10. On peut aussi utiliser un résultat donné par le sujet (un résultat d'une question en "Montrer que …") mais c'est tout ! On ne peut pas essayer de deviner le résultat d'une question et l'invoquer pour les questions suivantes.
11. Pour montrer que deux quantités sont égales, les rédactions sont souvent confuses : il suffit de calculer **séparément** ces quantités, puis de constater qu'elles sont égales.

II Erreurs spécifiques des différentes questions

Exercice 1 C'était un exercice sur les récurrences, et il fallait faire trois récurrences, proprement.

1. Récurrence la plus facile, qui est là juste pour vérifier la rédaction générale d'une récurrence.
2. L'initialisation est mal rédigée : trop de copies calculent en même temps u_0 et $2^{n+1}-1$ pour $n=0$, et se retrouvent à écrire $u_0 = 2^1 - 1$ sans rien montrer. Cela revient donc d'écrire directement le résultat, et ne montre en rien l'initialisation.
3. Beaucoup de copies donnent un résultat sans démonstration. On demandait explicitement les valeurs de a et b, et trop de copies :
   - ne les donnent pas explicitement ;
   - donnent des valeurs fausses (alors qu'il suffisait de calculer u_1 pour avoir a et b) ;
   - donnent des valeurs qui n'ont aucun sens (des $a = n$ ou $a = u_n$, ce qui ne veut absolument rien dire).

Exercice 2 Il suffisait de faire une disjonction de cas pour éliminer la valeur absolue. Beaucoup de copies s'emmêlent en partant de ce qu'il faut montrer, et arrivent à quelque chose de cohérent. Pour rappel, l'implication $A \Rightarrow B$ ne peut que montrer que B est vraie (en montrant que A l'est) ou que A est fausse (en montrant que B l'est, comme pour un raisonnement par l'absurde), et **c'est tout !** Donc on ne peut surtout pas conclure que le départ d'une suite d'implication est vraie comme à l'arrivée on a quelque chose de vrai.

Problème qui apparaît dans de très nombreuses copies : beaucoup écrivent que, pour $x \geqslant y$:

$$\frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \mathrm{Max}(x,y)$$

ce qui est bien évidemment vrai, mais ne répond pas du tout à la question !

Exercice 3

1. La démonstration par analyse–synthèse était naturelle ici, comme on perdait l'équivalence en passant l'égalité au carré. Certains essaient de réduire l'ensemble solution (ils font une analyse sans le dire) pour pouvoir travailler avec des équivalences, mais ne disent pas bien comment ils réduisent l'ensemble solution, ni ne justifient les équivalences ensuite.

   D'autres travaillent avec (soit disant) des équivalences, mais font ensuite une synthèse pour éliminer la solution absurde : c'est que l'on n'avait pas des équivalences...
2. Ici la valeur absolue était difficile à éliminer avec un carré, donc la disjonction de cas était la plus efficace, mais :
   - il faut bien conclure à chaque cas, et de manière claire (écrire $S_1 = \dots$ n'explique rien) ;
   - il faut vérifier que les solutions trouvées sont bien dans l'ensemble sur lequel on résout (il y avait un cas sans solution) ;
   - on vérifie que les cas sont cohérents : par exemple, si on écrit que $|-3x+4| = 3x-4$ pour $x \leqslant 4/3$, on doit ce rendre compte qu'il y a un problème car en $-\infty$ la quantité $3x-4$ tend vers $-\infty$ alors qu'une valeur absolue est toujours positive (on se relit...).

Exercice 4

1. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est parfois donné de manière étrange (quotient de réels, quotients d'entiers naturels, on oublie que le dénominateur est non nul, etc.). Ou parfois de manière très contraignante (rajouter que la fraction doit être irréductible, ce qu'il faudrait en théorie prouver en question suivante).
2. Phrase souvent bien énoncée, et bien prouvée. Quelques maladresse : les écritures des rationnels sont mal introduites, certains annoncent obtenir des fractions irréductibles mais ne le prouvent pas (c'était d'ailleurs faux), et oublient de vérifier la non-nullité du dénominateur.

3. Démonstrations farfelues : certains se contentent d'un exemple, ou invoquent bizarrement la contraposée mais sans l'énoncer correctement. Et (comme pour la question suivante) certains inventent des définitions des irrationnels : on peut les écrire x/y avec $x, y \notin \mathbb{Z}$ (mais alors $1 = \sqrt{2}/\sqrt{2}$ serait irrationnel) ; ou alors on fixe $x, y \in \mathbb{Z}$ et un élément irrationnel est différent de x/y (et on retrouve des problèmes très proches du cas précédent).
4. Quelques copies ont vu la subtilité : il y a un problème si le rationnel est nul. Cela veut dire que beaucoup trop de copies divisent possiblement par 0 sans s'en rendre compte.

Exercice 5

1. Définition à revoir. Des choses assez choquantes que je préfère ne pas écrire. Et surtout énoncées n'importe comment.
2. Il y avait quatre assertions qui se ressemblaient beaucoup. On pouvait se douter qu'il y en avait deux vraies et deux fausses, et même les grouper par deux en reconnaissant des contraposées (a et d d'un côté, b et c de l'autre).
   — certains ont vu les contraposées, mais font reposer leur démonstration (par exemple du c) sur une démontration fausse (celle du b par exemple), ce qui est maladroit.
   — Les résultats a et d étaient faux : il fallait le prouver par un contre-exemple explicite (et, même si une implication était vraie, cela ne servait à rien de la prouver).
   — Les résultats b et c étaient vrais : une implication était plus facile (c'était bien de le voir) ; l'autre reposait sur le fait que, si k, l sont des entiers, alors $k < l \Leftrightarrow k \leqslant l - 1 \Leftrightarrow k + 1 \leqslant l$ (ce qu'on avait bien dit en TD). On pouvait aussi revenir à la définition de la partie entière (le plus **grand** entier tel que ...), mais cela demandait de connaître sa définition...

Exercice 6

1. Première question mal traitée, avec beaucoup de $\forall x, y \in \mathbb{R}$ oubliés, ou des copies qui mélangent f_1 et f_2 dans leurs assertions pour montrer simultanément qu'elles sont solution...
2. Question peu traitée. Clairement la A (pour son membre de droite) est plus contraignante que la B, donc s'il n'y en a qu'une vraie, ça doit être la B.
3. Beaucoup de gens ne spécifient pas comment ils obtiennent $|f(0) + f(O)| = |0 + 0|$: il faut bien partir d'une propriété satisfaite par f, et le dire.
4. Idem.
5. (a) Bien réussie.
   (b) Le cas $x = 0$ est parfois oublié, souvent mal justifié. Il fallait bien écrire $f(0) = 0$ lorsque l'on veut partir de $f(x) \neq x$, et $f(0) \neq -0$ lorsque l'on part de $f(x) \neq -x$ pour justifier proprement.
   (c) L'assertion A étant fausse, il fallait utiliser plus que le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = |x|$. La plus grosse erreur étant que le x tel que $f(x) \neq x$ et celui tel que $f(x) \neq -x$ ne sont a priori pas les mêmes (certains l'ont vu).
6. C'était un raisonnement par analyse–synthèse : il fallait le dire ! Et l'analyse devait être finie : on a seulement montré à la question 5 que C est vraie si f est solution ; il fallait juste conclure que cela veut dire que $f = f_1$ ou $f = f_2$.

Problème
Globalement trop peu traité.

1. Question qui avait été donnée à l'avance, et très guidée/découpée. Souvent mal faite, et mal justifiée. Le problème surtout est que vous étiez supposés avoir réfléchi à cette question avant : ceux qui n'avaient pas réussi à aboutir n'auraient même pas dû chercher à y répondre.
2. Question facile traitée en TD. Pour la situation d'égalité, rares sont les copies qui l'énoncent par une équivalence, et beaucoup se contentent d'écrire "il y a égalité pour ...".
3. Question facile assez bien traitée, et assez souvent traitée. Il manque tout de même souvent les justifications de signe pour justifier les inégalités. Et beaucoup cherchent à manipuler les inégalités par équivalences, ce qui ne sert à rien.
4. Beaucoup de coups de bluff sur cette question : la transformation du 9/2 en 3/2 se faisait en retranchant 3, et non en divisant par 3 (comme ce que trop de copies laissent croire).
5. (et suivantes) Assez peu traitées. Un peu de grapillage par endroits surtout.