DS n^{o}1 : corrigé

I Exercices

Exercice 1 1. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $n = 0$ d'où l'égalité pour $n = 0$;
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = n$. Alors :

$$u_{n+1} = u_n + 1 \overset{HR}{=} n + 1$$

ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

2. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $2^{n+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ d'où l'égalité pour $n = 0$;
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^{n+1} - 1$. Alors :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 \overset{HR}{=} 2\left(2^{n+1} - 1\right) + 1 = 2^{n+2} - 2 + 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$$

ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

3. On a déjà que $u_0 = 0$ et $u_1 = u_0 + (-1)^0 = 0 + 1 = 1$. Montrons que $a = 0$ et $b = 1$ conviennent, ce que l'on fait par récurrence :

- initialisation : pour $n = 0$: $u_0 = 0 = a$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$;
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (-1)^n = \begin{cases} u_n + 1 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ u_n - 1 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases} \\ &\overset{HR}{=} \begin{cases} 0 + 1 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 1 - 1 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

et ainsi :

$$u_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n+1 \text{ est pair} \\ 1 & \text{si} \quad n+1 \text{ est impair} \end{cases}$$

ce qui prouve bien l'assertion au rang $n + 1$, et conclut l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

Exercice 2 1. On procède par disjonction de cas :

- si $x \geqslant y$: alors $\text{Max}(x, y) = x$ (par définition) et $|x - y| = x - y$ donc :

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \text{Max}(x, y)$$

ce qui prouve bien l'égalité dans ce cas.

- si $x < y$: alors $\text{Max}(x, y) = y$ (par définition) et $|x - y| = y - x$ donc :

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + y - x}{2} = \frac{2y}{2} = y = \text{Max}(x, y)$$

ce qui prouve bien l'égalité dans ce cas.

D'où l'égalité demandée.

2. On procède par disjonction de cas :
   — si $x \geqslant y$: alors $\text{Min}(x, y) = y$ (par définition) et $|x - y| = x - y$ donc :
   $$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - x + y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \text{Min}(x, y)$$
   ce qui prouve bien l'égalité dans ce cas.
   — si $x < y$: alors $\text{Min}(x, y) = x$ (par définition) et $|x - y| = y - x$ donc :
   $$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - y + x}{2} = \frac{2x}{2} = y = \text{Min}(x, y)$$
   ce qui prouve bien l'égalité dans ce cas.

   D'où l'égalité demandée.

Exercice 3 1. On procède par analyse–synthèse :
   — analyse : si x est solution, alors $x \leqslant 2$ (pour que la racine soit bien définie)
   Mais on a alors $x = \sqrt{2 - x} \geqslant 0$. Donc $x \in [0; 2]$.
   De plus, en mettant au carré l'égalité : $x^2 = 2 - x$, donc $x^2 + x - 2 = 0$, donc $x = 1$ ou $x = -2$.
   Et finalement, comme $x \in [0; 2]$, alors $x = 1$.
   Donc l'unique solution **possible** est 1 ;
   — synthèse : pour $x = 1$, on a : $x = 1$ et $\sqrt{2 - x} = \sqrt{2 - 1} = 1$. Donc 1 est bien solution

   Conclusion : 1 est l'unique solution de l'équation.

2. On procède par disjonction de cas :
   (a) si $x \leqslant 4/3$: alors :
   $$|-3x + 4| + |x - 5| = 10 \Leftrightarrow -3x + 4 - x + 5 = 10 \Leftrightarrow -4x + 9 = 10 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$
   et, comme $-1/4$ est bien un élément de $]-\infty; 4/3]$, alors c'est l'unique solution de l'équation sur cet intervalle ;
   (b) si $4/3 < x \leqslant 5$: alors :
   $$|-3x + 4| + |x - 5| = 10 \Leftrightarrow 3x - 4 - x + 5 = 10 \Leftrightarrow 2x + 1 = 10 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$$
   et, comme $9/2$ est bien un élément de $]4/3; 5]$, alors c'est l'unique solution de l'équation sur cet intervalle ;
   (c) si $x > 5$: alors :
   $$|-3x + 4| + |x - 5| = 10 \Leftrightarrow 3x - 4 + x - 5 = 10 \Leftrightarrow 4x - 9 = 10 \Leftrightarrow x = \frac{19}{4}$$
   mais $19/4$ n'est pas dans $]5; +\infty[$, donc il n'y a pas de solution sur cet intervalle.

   Conclusion : l'équation admet deux solutions, qui sont $-1/4$ et $9/2$

Exercice 4 1. On a : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$.

2. La somme et le produit de deux rationnels sont des rationnels.
   On le prouve par raisonnement direct. Soient $a, b \in \mathbb{Q}$. Posons $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ avec $n, q \neq 0$ tels que $a = \frac{m}{n}$ et $b = \frac{p}{q}$. Alors :

— $a+b=\dfrac{m}{n}+\dfrac{p}{q}=\dfrac{mq+np}{nq}$ qui est bien un rationnel car $mp+np\in\mathbb{Z}$ (produit et somme d'entiers), $nq\in\mathbb{Z}$ (produit d'entier) et $nq\neq 0$ (comme $n,q\neq 0$) ;

— $a\times b=\dfrac{m}{n}\times\dfrac{p}{q}=\dfrac{mp}{nq}$ qui est bien un rationnel car $mp,nq\in\mathbb{Z}$ (produit d'entiers) et $nq\neq 0$ (comme $n,q\neq 0$).

Ce qui prouve bien l'implication.

3. Soient $a,b\in\mathbb{R}$. On suppose que $a\notin\mathbb{Q}$ et que $b\in\mathbb{Q}$. On souhaite montrer que $c=a-b\notin\mathbb{Q}$.

On procède par l'absurde : supposons que $c\in\mathbb{Q}$. Alors $a=c+b\in\mathbb{Q}$ (en tant que somme de rationnels, par le résultat précédent).

D'où la contradiction car $a\notin\mathbb{Q}$.

Conclusion : $c\notin\mathbb{Q}$.

4. Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel peut tout aussi bien être un irrationnel qu'un rationnel :

— $1\in\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ et $1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$;

— $0\in\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ et $0\cdot\sqrt{2}=0\in\mathbb{Q}$;

On a en fait le résultat suivant : le produit d'un rationnel non nul par un irrationnel est toujours un irrationnel.

Exercice 5 1. La partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x, c'est-à-dire l'unique entier $\lfloor x\rfloor$ tel que : $\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1$.

2. (a) C'est faux : avec $x=1/2$ et $n=0$ on a : $\lfloor x\rfloor=0$ et donc $\lfloor x\rfloor\leqslant n$ (c'est même un égalité) mais $x>n$, donc l'autre inégalité est fausse.

(b) C'est vrai. On le prouve par double implication :

— si $\lfloor x\rfloor<n$: comme n et $\lfloor x\rfloor$ sont des entiers, alors $\lfloor x\rfloor+1\leqslant n$.
Mais par définition de la partie entière : $\lfloor x\rfloor>x-1$.
Donc : $x<\lfloor x\rfloor+1\leqslant n$.
Donc $x<n$, ce qui prouve la première implication.

— si $x<n$: par définition, on a : $\lfloor x\rfloor<x$.
Donc : $\lfloor x\rfloor<x<n$
Donc $\lfloor x\rfloor<n$, ce qui prouve la réciproque.

(c) C'est vrai. On le prouve par double implication :

— si $\lfloor x\rfloor\geqslant n$: par définition, on a : $\lfloor x\rfloor\leqslant x$.
Donc $x\geqslant\lfloor x\rfloor\geqslant n$.
Donc $x\geqslant n$, ce qui prouve la première implication.

— si $x\geqslant n$: par définition, on a : $\lfloor x\rfloor+1>x$.
Donc $\lfloor x\rfloor+1>x\geqslant n$.
Donc $\lfloor x\rfloor+1>n$.
Mais $\lfloor x\rfloor$ et n sont des entiers, donc $\lfloor x\rfloor\geqslant n$, ce qui prouve la réciproque.

(d) C'est faux : avec $x=1/2$ et $n=0$, on a : $\lfloor x\rfloor=0$ et donc on n'a pas $\lfloor x\rfloor>n$. En revanche on a bien $x>n$. Donc les inégalités ne sont pas équivalentes.

Remarque : on pouvait aussi se contenter de montrer/invalider les deux premières, et reconnaître que les deux suivantes sont les contraposées (et ont donc même valeur de vérité), ce qui permet de conclure plus rapidement.

Exercice 6 1. On montre séparément qu'elles sont solution.

— pour f_1 : soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors : $f_1(x) = x$ et $f_1(y) = y$ donc :

$$|f_1(x) + f_2(y)| = |x + y|$$

donc f_1 est bien solution ;

— pour f_2 : soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $f_2(x) = -x$ et $f_2(y) = -y$ donc :

$$|f_2(x) + f_2(y)| = | - x - y| = |x + y|$$

donc f_2 est également solution.

2. (a) L'assertion A est fausse. Par exemple, avec $f : x \mapsto |x|$ (la fonction valeur absolue), on a :
   — $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = ||x|| = |x|$, donc l'assertion de gauche est vraie ;
   — avec $x = 1$: $f(1) = 1 \neq -1$ donc l'assertion $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x$ est fausse ; avec $x = -1$: $f(-1) = 1 \neq -1$ donc l'assertion $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$ est fausse ; donc l'assertion de droite est fausse.

   (b) L'assertion B est vraie. En effet, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$|a| = |b| \Leftrightarrow (a = b \text{ ou } a = -b)$$

   ce qui donne directement l'équivalence.

Pour les questions 3, 4 et 5, on suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution au problème.

3. On applique la propriété satisfaite par f avec $x = y = 0$. On a :

$$|f(0) + f(0)| = |0 + 0|$$

donc $2|f(0)| = 0$, et ainsi : $f(0) = 0$.

4. On applique la propriété satisfaite par f avec $x \in \mathbb{R}$ quelconque et $y = 0$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) + f(0)| = |x + 0|$$

ce qui donne bien la propriété demandée, comme $f(0) = 0$.

5. On considère l'assertion suivante :

$$C : ((\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x))$$

   (a) La négation est :

$$((\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq x) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq -x))$$

   (b) i. Soit x tel que $f(x) \neq x$:
   — comme $f(0) = 0$, alors nécessairement $x \neq 0$;
   — comme $|f(x)| = |x|$ par la question précédente, alors $f(x) = \pm x$, donc $f(x) = -x$.
   ce qui donne bien le résultat par conjonction.

   ii. Soit x tel que $f(x) \neq -x$:
   — comme $f(0) = 0 = -0$, alors nécessairement $x \neq 0$;
   — comme $|f(x)| = |x|$ par la question précédente, alors $f(x) = \pm x$, donc $f(x) = x$.
   ce qui donne bien le résultat par conjonction.

   (c) Par l'absurde, supposons C fausse. Alors :
   — $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq x$: considérons x un tel élément, qui vérifie par le point précédent $f(x) = -x$ et $x \neq 0$;
   — $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq -x$: considérons y un tel élément, qui vérifie par le point précédent $f(y) = y$ et $y \neq 0$.

En appliquant la propriété vérifiée par f pour ces valeurs de x et y, on a donc :

$$|f(x)+f(y)| = |-x+y| = |x+y|$$

donc $|-x+y| = |x+y|$, puis en mettant au carré : $x^2+y^2-2xy = x^2+y^2+2xy$.
Donc $xy=0$, donc $x=0$ ou $y=0$.
Mais on a vu que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
D'où la contradiction.
Donc C est vraie.

6. On procède par analyse–synthèse :
   - analyse : si f est une solution, alors :

   $$((\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=-x))$$

   c'est-à-dire $f=f_1$ ou $f=f_2$. Donc f_1 et f_2 sont les seules solutions possibles.
   - synthèse : f_1 et f_2 sont bien solution (montré en question 1).

   Par analyse–synthèse, les seules fonctions qui vérifient la propriété voulue sont f_1 et f_2.

II Problème

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Procédons par double implication :
   - si $\sqrt[3]{x} > 0$: alors en multipliant deux fois cette inégalité avec elle-même (tout est positif) : $(\sqrt[3]{x})^3 = x > 0$, ce qui prouve la première implication.
   - montrons la réciproque par contraposée : supposons que $\sqrt[3]{x} \leqslant 0$. Alors $0 \leqslant -\sqrt[3]{x}$. Et en multipliant cette inégalité deux fois avec elle-même (tout est positif) : $0 \leqslant (-\sqrt[3]{x})^3 = -(\sqrt[3]{x})^3 = -x$. Donc $x \leqslant 0$. D'où la réciproque par contraposée

   Ce qui prouve l'équivalence.

   (b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons que si $x < y$, alors $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$ par disjonction de cas :
   - si $x, y > 0$: on procède par contraposée. Supposons que $\sqrt[3]{x} \geqslant \sqrt[3]{y}$. Comme $x, y > 0$, par la question précédente on a donc : $0 < \sqrt[3]{y} \leqslant \sqrt[3]{x}$. En multipliant cette égalité avec elle-même deux fois (tout est positif), on déduit : $0 < y \leqslant x$. Ce qui prouve le résultat par contraposée;
   - si $x, y \leqslant 0$: on procède par contraposée. Supposons que $\sqrt[3]{x} \geqslant \sqrt[3]{y}$. Comme $x, y \leqslant 0$, par contraposée de la question précédente on a donc : $\sqrt[3]{y} \leqslant \sqrt[3]{x} \leqslant 0$. En multipliant par -1 il vient : $0 \leqslant (-\sqrt[3]{x}) \leqslant (-\sqrt[3]{y})$. Et en multipliant cette inégalité deux fois avec elle-même (tout est positif) : $0 \leqslant -x \leqslant -y$. Et finalement $y \leqslant x$. Ce qui prouve le résultat par contraposée.
   - sinon : supposons $x < y$. Alors $x \leqslant 0 < y$ (sinon on est dans un des cas précédents). Par la question précédente, on a donc : $\sqrt[3]{x} \leqslant 0$ et $\sqrt[3]{y} > 0$. Donc $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$. D'où le résultat.

   On a donc prouvé que pour tous $x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$: la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$:
   - par définition, $\sqrt[3]{xy}$ est l'unique réel dont le cube vaut xy. Or, on a :

   $$\left(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = xy$$

   donc par définition : $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$.

— par définition, $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ est l'unique réel dont le cube vaut $1/x$. Si $x \neq 0$, on a déjà que $\sqrt[3]{x} \neq 0$ (comme $\sqrt[3]{0} = 0$ et que $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$). Et ainsi :

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 = \frac{1^3}{\sqrt[3]{x}^3} = \frac{1}{x}$$

donc par définition : $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

2. Si $x, y \in \mathbb{R}$, alors : $(x-y)^2 \geqslant 0$, donc : $x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0$. Et ainsi : $2xy \leqslant x^2 + y^2$.
   De plus, on a : $2xy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 = (x-y)^2 \Leftrightarrow x - y = 0$. Donc il y a égalité si, et seulement si, $x = y$.
3. **Inégalité arithmético-harmonique :**
   (a) On a :

$$\begin{aligned} H(a,b,c) &= \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3}{\frac{bc}{abc}+\frac{ac}{abc}+\frac{ab}{abc}} \\ &= \frac{3}{\frac{ab+bc+ac}{abc}} = \frac{3abc}{ab+bc+ac} \end{aligned}$$

   ce qui est bien l'égalité voulue.

   (b) On a par la question 1 que : $2ac \leqslant a^2 + c^2$.
   Comme $b > 0$, en multipliant l'inégalité précédente par b, on trouve bien : $2abc \leqslant a^2b + bc^2$.

   (c) On montre de la même manière qu'on a aussi les inégalités :

$$2abc \leqslant a^2c + cb^2 \text{ et } 2abc \leqslant ab^2 + ac^2.$$

   En additionnant ces trois inégalités, on déduit que :

$$6abc \leqslant a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

   Or, on a :

$$\begin{aligned} (a+b+c)(ab+bc+ac) &= a^2b + abc + a^2c + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + ac^2 \\ &= (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 3abc \end{aligned}$$

   et ainsi, en ajoutant $3abc$ à chaque membre de l'inégalité précédente :

$$9abc \leqslant (a+b+c)(ab+bc+ac).$$

   (d) Comme $a, b, c > 0$, alors $(ab+bc+ac) > 0$. Par la question précédente, on a donc :

$$\frac{9abc}{ab+bc+ac} \leqslant a+b+c$$

   et donc :

$$\frac{3abc}{ab+bc+ac} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

   c'est-à-dire :

$$H(a,b,c) \leqslant M(a,b,c)$$

   qui était l'inégalité à prouver.

4. **Première preuve de l'inégalité de Nesbitt :** On a donc :

$$\frac{3}{\frac{1}{u+v}+\frac{1}{v+w}+\frac{1}{u+w}} \leqslant \frac{(u+v)+(v+w)+(u+w)}{3}$$

donc :

$$\frac{9}{2} \leqslant \left(\frac{1}{u+v}+\frac{1}{v+w}+\frac{1}{u+w}\right)(u+v+w)$$

En développant, le membre de droite se simplifie en :

$$1+\frac{w}{u+v}+1+\frac{u}{v+w}+1+\frac{v}{u+w} = \frac{w}{u+v}+\frac{u}{v+w}+\frac{v}{u+w}+3$$

et en réinjectant cette expression, l'inégalité précédente devient :

$$\frac{9}{2}-3 = \frac{3}{2} \leqslant \frac{w}{u+v}+\frac{u}{v+w}+\frac{v}{u+w}$$

ce qui prouve bien l'inégalité.

5. **Inégalité arithmético-géométrique :**

(a) On considère x, y, z trois réels strictement positifs :

i. La fonction $f : y \mapsto y(1-y)^2$ est dérivable sur $[0;1]$ (en tant que polynôme), de dérivée en $y \in [0;1]$:

$$f'(y) = (1-y)^2 - 2y(1-y) = (1-y)[1-y-2y] = (1-y)(1-3y)$$

donc on trouve ainsi que f est croissante sur $[0;\frac{1}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{3};1]$, donc f atteint son maximum en $y = \dfrac{1}{3}$. Et ce maximum vaut : $f(1/3) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$. Ce qui montre bien l'inégalité voulue.

ii. On pourrait refaire une étude de fonction, mais changeons un peu... Comme f_y est un polynôme du second degré en x, qui s'annule en 0 (c'est clair) et en $1-y$ (ça se voit), et de coefficient dominant négatif, on déduit que f_y atteint son maximum en la moyenne de ses racines, c'est-à-dire en $\frac{1-y}{2}$. Son maximum vaut donc : $f_y(\frac{1-y}{2}) = -y\frac{(1-y)^2}{4} + y(1-y)\frac{(1-y)}{2} = \frac{1}{4}y(1-y)^2$.

iii. Comme $x, y, z > 0$ et $x+y+z = 1$, alors choisir x, y, z revient à choisir $y \in]0;1[$, prendre $x \in]0;1-y[$, et poser $z = 1-x-y$. Ainsi, on s'intéresse au maximum, pour $y \in]0;1[$ et $x \in]0;1-y[$, de la quantité $x \cdot y \cdot (1-x-y)$.

En développant, on trouve que cette quantité vaut : justement $f_y(x)$. Son maximum à y fixé est donc : $\frac{1}{4}y(1-y)^2$ (par la question *ii*).

Et donc son maximum, pour y quelconque, est : $\frac{1}{27}$ (par la question *i*).

On a même mieux : ce maximum est atteint pour $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1-y}{2} = \frac{1}{3}$ et donc $z = 1-x-y = \frac{1}{3}$, donc pour $x = y = z$.

(b) Comme $a, b, c > 0$, alors on a déjà que $x, y, z > 0$. De plus, on a bien que :

$$x+y+z = \frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

On peut donc appliquer l'inégalité précédente à x, y, z, ce qui donne :

$$\frac{abc}{(a+b+c)^3} \leqslant \frac{1}{27}$$

donc :

$$0 \leqslant abc \leqslant \frac{(a+b+c)^3}{27}$$

et finalement, par propriétés de la racine cubique :

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

(comme $3^3 = 27$) qui est bien l'inégalité voulue.

6. **Seconde preuve de l'inégalité de Nesbitt :** Appliquons l'inégalité arithmético géométrique à $(u+v), (v+w), (u+w)$ puis à leurs inverses. On trouve ainsi les deux inégalités :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & \sqrt[3]{(u+v)(u+w)(v+w)} & \leqslant & \dfrac{(u+v)+(u+w)+(v+w)}{3} \\ 0 & \leqslant & \sqrt[3]{\dfrac{1}{(u+v)(u+w)(v+w)}} & \leqslant & \dfrac{\frac{1}{u+v}+\frac{1}{u+w}+\frac{1}{v+w}}{3} \end{array}\right.$$

et en multipliant ces inégalités (comme tous les membres sont positifs), on déduit que :

$$0 \leqslant 1 \leqslant \frac{((u+v)+(v+w)+(u+w))\left(\dfrac{1}{u+v}+\dfrac{1}{v+w}+\dfrac{1}{u+w}\right)}{9}$$

qui donne bien l'inégalité voulue.

En développant, on trouve de même qu'en *4* que :

$$((u+v)+(v+w)+(u+w))\left(\frac{1}{u+v}+\frac{1}{v+w}+\frac{1}{u+w}\right) = 3 + \frac{w}{u+v} + \frac{v}{u+w} + \frac{u}{v+w}$$

et on retrouve bien l'inégalité de Nesbitt.

7. Pour la condition d'égalité, utilisons la seconde preuve. Il y a égalité dans l'inégalité de Nesbitt si, et seulement si, il y a égalité dans l'inégalité arithmético géométrique associée, ce qui est le cas lorsque la quantité xyz atteignait son maximum.

   Or, on a vu que c'était le cas si, et seulement si : $x = y = z = \frac{1}{3}$. Suivant les notations précédentes, cette condition est équivalente au fait que $a = b = c$.

   En terme de conditions sur u, v, w, cela revient à dire que : $u + v = u + w = v + w$. La première égalité impose $v = w$, et la seconde que $u = v$.

   Et finalement, l'inégalité de Nesbitt est une égalité si, et seulement si, $u = v = w$.