DS n^{o}1

À lire attentivement avant de faire quoi que ce soit :

— toutes les consignes de rédaction et de présentation données dans le DM1 sont valables
— la notation tiendra très fortement compte de la rédaction
— les exercices sont indépendants, et se veulent progressifs dans la difficulté (ce dernier point n'est pas un absolu comme la notion de difficulté est très subjective)
— il faut bien lire les questions et s'assurer d'y avoir bien répondu (surtout quand les questions comportent différentes parties)
— le problème est indépendant des exercices
— il est préférable d'en faire peu, mais bien, plutôt que beaucoup, mais mal
— il ne faut pas hésiter à passer une question qui semble trop difficile : les résultats d'une question, même s'ils n'ont pas été démontrés, peuvent alors être utilisés dans la suite de l'exercice

I Exercices

Exercice 1

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 1.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} - 1$.

3. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + (-1)^n$$

Montrer qu'il existe deux réels a, b (que l'on donnera explicitement) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} a & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ b & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Exercice 2 Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\text{Max}(x,y) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant y \\ y & \text{si} \quad x < y \end{cases} \text{ et } \text{Min}(x,y) = \begin{cases} y & \text{si} \quad x \geqslant y \\ x & \text{si} \quad x < y \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\text{Max}(x,y)$ est la plus grande valeur parmi x et y, et $\text{Min}(x,y)$ est la plus petite valeur parmi x et y.

1. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \text{Max}(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$.
2. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \text{Min}(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, d'inconnue x :

1. $\sqrt{2-x} = x$

2. $|-3x+4|+|x-5|=10$.

Exercice 4 1. Rappeler la définition de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

2. On considère l'assertion suivante :

$$\forall a,b\in\mathbb{R},\ (a\in\mathbb{Q} \text{ et } b\in\mathbb{Q}) \Rightarrow ((a+b)\in\mathbb{Q} \text{ et } (a\times b)\in\mathbb{Q}).$$

   Écrire en français (et le plus simplement possible) cette assertion, et la prouver.

3. En déduire que la différence d'un irrationnel et d'un rationnel est un irrationnel.
4. Que penser du produit d'un rationnel et d'un irrationnel ?

Exercice 5 Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$.

1. Rappeler la définition de la partie entière de x.
2. Dire parmi les assertions suivantes celles qui sont vraie ou fausse, et le prouver :
   (a) $\lfloor x\rfloor \leqslant n \Leftrightarrow x\leqslant n$
   (b) $\lfloor x\rfloor < n \Leftrightarrow x< n$
   (c) $\lfloor x\rfloor \geqslant n \Leftrightarrow x\geqslant n$
   (d) $\lfloor x\rfloor > n \Leftrightarrow x> n$

Exercice 6 Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ |f(x)+f(y)|=|x+y|.$$

1. Montrer que les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_1(x)=x \text{ et } f_2(x)=-x$$

   sont solution au problème.

2. On considère les deux assertions suivantes :

$$\begin{array}{lcl} A & : & (\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|=|x|) \Leftrightarrow ((\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x) \text{ ou } (\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-x)) \\ B & : & (\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|=|x|) \Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x \text{ ou } f(x)=-x) \end{array}.$$

   (a) L'une des assertions ci-dessus est fausse : dire laquelle, et le prouver.
   Indication : on pourra utiliser une fonction présentée en classe en guise de contre-exemple.
   (b) L'une des assertions ci-dessus est vraie : dire laquelle, et le prouver.

   Pour les questions 3, 4 et 5, on suppose que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est solution au problème.

3. Montrer que $f(0)=0$.
4. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|=|x|$.
5. On considère l'assertion suivante :

$$C : ((\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x) \text{ ou } (\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-x))$$

   (a) Écrire la négation de C.
   (b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que :
      i. Si $f(x)\neq x$, alors $f(x)=-x$ et $x\neq 0$.
      ii. Si $f(x)\neq -x$, alors $f(x)=x$ et $x\neq 0$.
   (c) En déduire que C est vraie.
   Indication : on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

6. Conclure, en précisant bien le raisonnement utilisé.

II Problème

Le but de ce problème est de prouver, de deux manière différentes, l'inégalité suivante :

Inégalité de Nesbitt : si $u, v, w \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\frac{u}{v+w} + \frac{v}{u+w} + \frac{w}{u+v} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Dans toute la suite, on considère fixés u, v, w trois réels strictement positifs.

1. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, sa **racine cubique**, notée $\sqrt[3]{x}$ comme l'unique nombre dont le cube vaut x.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} > 0$.
   (b) En déduire que la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Indication : on pourra utiliser une disjonction de cas suivant le signe des réels dont on étudie les images, et raisonner par contraposée
   (c) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$ et $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (si $x \neq 0$).
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $2xy \leqslant x^2 + y^2$, et préciser la situation d'égalité.
3. **Inégalité arithmético-harmonique :** Étant donnés $a, b, c > 0$, leur **moyenne arithmétique** est le réel $M(a,b,c) = \dfrac{a+b+c}{3}$ et leur **moyenne harmonique** est le réel $H(a,b,c) = \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.
   (a) Montrer que : $H(a,b,c) = \dfrac{3abc}{ab+bc+ac}$.
   (b) À l'aide de la question *2.*, montrer que $2abc \leqslant a^2b + bc^2$.
   (c) En déduire que : $9abc \leqslant (a+b+c)(ab+bc+ac)$.
   (d) Déduire des questions précédentes l'inégalité arithmético-harmonique : $H(a,b,c) \leqslant M(a,b,c)$.
4. **Première preuve de l'inégalité de Nesbitt :** En appliquant l'inégalité arithmético-harmonique à $u+v$, $u+w$ et $v+w$, montrer l'inégalité de Nesbitt.
5. **Inégalité arithmético-géométrique :**
   (a) On considère x, y, z trois réels strictement positifs :
      i. Montrer que : $\forall y \in [0;1],\ y(1-y)^2 \leqslant \dfrac{4}{27}$. On pourra utiliser une étude de fonction.
      ii. Soit $y \in]0;1[$. Déterminer le maximum de la fonction f_y définie sur $[0; 1-y]$ par :
      $$\forall x \in [0; 1-y],\ f_y(x) = -yx^2 + y(1-y)x.$$
      iii. En déduire que, si x, y, z sont trois réels strictement positifs tels que $x+y+z = 1$, alors : $xyz \leqslant \frac{1}{27}$.
   (b) En appliquant l'inégalité précédente à $x = \dfrac{a}{a+b+c}$, $y = \dfrac{b}{a+b+c}$ et $z = \dfrac{c}{a+b+c}$, montrer l'inégalité arithmético-géométrique : $\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$.
   On commencera par montrer que x, y, z vérifient bien les hypothèses précédentes.
6. **Seconde preuve de l'inégalité de Nesbitt :** En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique deux fois à des nombres bien choisis, montrer que :
   $$((u+v)+(v+w)+(u+w))\left(\frac{1}{u+v}+\frac{1}{v+w}+\frac{1}{u+w}\right) \geqslant 9$$
   et en déduire une nouvelle preuve de l'inégalité de Nesbitt.
7. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u, v, w pour que l'inégalité de Nesbitt soit une égalité.