

DM n°5

I Endomorphismes nilpotents en dimension 3

1. (a) Comme u est un endomorphisme, par composée u^j est un endomorphisme, donc linéaire. Et v est la restriction donc est linéaire : en effet, si $x, y \in \text{Ker} u^{i+j}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$v(\lambda x + \mu y) = u^j(\lambda x + \mu y) = \lambda u^j(x) + \mu u^j(y) = \lambda v(x) + \mu v(y).$$

- (b) Soit $y \in \text{Im} v$. Alors il existe $x \in \text{Ker} u^{i+j}$ tel que $y = v(x) = u^j(x)$.

Et alors : $u^i(y) = u^{i+j}(x) = 0$ (car $x \in \text{Ker} u^{i+j}$). Donc $y \in \text{Ker} u^i$.

Et ainsi : $\text{Im} v \subset \text{Ker} u^i$.

Pour l'aspect endomorphisme, il faut montrer que $\text{Im} v \subset \text{Ker} u^{i+j}$. On a déjà $\text{Im} v \subset \text{Ker} u^i$.

Et pour $x \in \text{Ker} u^i$:

$$u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x)) = u^j(0) = 0$$

donc $x \in \text{Ker} u^{i+j}$.

Donc $\text{Ker} u^i \subset \text{Ker} u^{i+j}$, et par transitivité $\text{Im} v \subset \text{Ker} u^{i+j}$, donc v est un endomorphisme de $\text{Ker} u^{i+j}$.

- (c) Soit $x \in \text{Ker} v$.

Alors $0 = v(x) = u^j(x)$ donc $x \in \text{Ker} u^j$.

D'où l'inclusion cherchée.

- (d) Appliquons le théorème du rang à v :

$$\dim(\text{Ker} u^{i+j}) = \dim(\text{Ker} v) + \dim(\text{Im} v)$$

et on a, en passant aux dimension dans les inclusions précédentes :

$$\dim(\text{Ker} v) \leq \dim(\text{Ker} u^j) \text{ et } \dim(\text{Im} v) \leq \dim(\text{Ker} u^i)$$

et en réinjectant ces inégalités, on trouve bien :

$$\dim(\text{Ker} u^{i+j}) \leq \dim(\text{Ker} u^i) + \dim(\text{Ker} u^j).$$

2. Si $u^3 = 0$, alors u n'est pas inversible, car la composée d'automorphismes est un automorphisme. Ainsi, $\text{rg}(u) \neq \dim(E) = 3$. Et comme $\text{rg}(u) \leq \dim E$, on a bien $\text{rg}(u) \leq 2$.

Le cas $\text{rg}(u) = 0$ correspond au cas $u = 0$.

3. (a) Avec $i = 1$ et $j = 2$ pour la question 3, on déduit :

$$3 = \dim E = \dim \text{Ker} u^3 \leq \dim \text{Ker} u + \dim \text{Ker} u^2 = 1 + \dim \text{Ker} u^2$$

en utilisant que, par théorème du rang : $\dim \text{Ker} u = \dim(E) - \text{rg}(u) = 3 - 2 = 1$.

Et ainsi : $\dim \text{Ker} u^2 \geq 2$, donc $\text{Ker} u^2$ est de dimension 2 ou 3.

- (b) Par l'absurde, si $\text{Ker} u^2 = E$: alors $u^2 = 0$ puis $\text{Im} u \subset \text{Ker} u$.

Mais $\dim \text{Im} u = 2$ alors que $\dim \text{Ker} u = 1$.

D'où la contradiction.

Donc $\text{Ker} u^2 \neq E$, puis $\dim \text{Ker} u^2 < 3$, donc cette dimension vaut bien 2.

(c) Comme $\text{Ker}u^2 = 2 \neq 3$, alors $u^2 \neq 0$.

Notons $x \in E$ tel que $u^2(x) \neq 0$ (qui existe bien comme $u^2 \neq 0$). Alors un tel x convient.

En effet, la famille $(u^2(x), u(x), x)$ étant de cardinal 3, il suffit de prouver qu'elle est libre pour montrer que c'est une base.

Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u^2(x) + \mu u(x) + \nu x = 0$. En appliquant u^2 , on déduit $0 + 0 + \nu u^2(x) = 0$, donc $\nu = 0$ (comme $u^2(x) \neq 0$). En réinjectant et en appliquant u , il vient : $0 + \mu u^2(x) + 0 = 0$ donc $\mu = 0$. En réinjectant on a : $\lambda u^2(x) = 0$ donc $\lambda = 0$. Donc $\lambda = \mu = \nu = 0$: la famille est libre.

(d) On calcule les images des vecteurs de la base. En notant $(u^2(x), u(x), x) = (e_1, e_2, e_3)$, on a :

$$u(e_1) = 0, \quad u(e_2) = e_1 \quad \text{et} \quad u(e_3) = e_2$$

$$\text{donc } U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même :

$$v(e_1) = 0, \quad v(e_2) = -e_1 \quad \text{et} \quad v(e_3) = e_1 - e_2$$

$$\text{donc } V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{on pouvait aussi dire directement que } V = U^2 - U \text{ et on retrouve la même matrice } V).$$

4. (a) i. C'est la même preuve qu'en 3)c) : tout x tel que $u^2(x)$ convient, et un tel x existe par hypothèse comme $u^2 \neq 0$.

La famille $(u(x), u^2(x))$ est donc libre, comme extraite d'une famille libre.

ii. Les vecteurs $u(x)$ et $u^2(x) = u(u(x))$ sont deux vecteurs de la droite $\text{Im}u$: la famille $(u(x), u^2(x))$ ayant plus de vecteurs que la dimension de l'espace dans lequel sont ces vecteurs, cette famille est liée.

D'où la contradiction.

Donc $u^2 = 0$.

(b) On a en revanche $u \neq 0$ comme $\text{rg}(u) = 1 \neq 0$. Et ainsi il existe b tel que $u(b) \neq 0$.

(c) Notons déjà que $u(b) \in \text{Ker}u$: comme $u^2 = 0$, alors $u(u(b)) = u^2(b) = 0$, ce qui prouve le résultat.

Mais $u(b) \neq 0$: donc la famille $(u(b))$ est libre. Par théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de $\text{Ker}u$. Et comme $\dim \text{Ker}u = 1$ (par théorème du rang), on a bien qu'il existe $c \in \text{Ker}u$ tel que $(u(b), c)$ est une base de $\text{Ker}u$.

Reste à montrer que $(b, u(b), c)$ est une base de E . Étant de bon cardinal, il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda b + \mu u(b) + \nu c = 0$.

En appliquant u , il vient : $\lambda u(b) + 0 + 0 = 0$, donc $\lambda = 0$ (car $u(b) \neq 0$).

Puis $\mu u(b) + \nu c = 0$, mais la famille $(u(b), c)$ est libre (c'est une base de $\text{Ker}u$) donc $\mu = \nu = 0$.

Et finalement : $\lambda = \mu = \nu = 0$, et la famille $(b, u(b), c)$ est libre. C'est donc une base de E .

(d) On a alors directement :

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II Une matrice unipotente de taille 3×3 est semblable à son inverse

5. La matrice T est inversible (triangulaire avec des coefficients tous non nuls sur la diagonale), donc $A = PTP^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

6. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ puis } N^3 = 0.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} A \cdot P (I_3 - N + N^2) P^{-1} &= A - APNP^{-1} + APN^2P^{-1} = A - P(I_3 + N)NP^{-1} + P(I_3 + N)N^2P^{-1} \\ &= A - PNP^{-1} - PN^2P^{-1} + PN^2P^{-1} + PN^3P^{-1} = PTP^{-1} - PNP^{-1} = P(T - N)P^{-1} = PI_3P^{-1} + I_3 \end{aligned}$$

ce qui prouve d'ailleurs à nouveau l'inversibilité de A , et donne de plus $A^{-1} = P(I_3 - N + N^2)P^{-1}$.

7. Si $N = 0$: $T = I_3$ et $A = I_3$. Donc $A^{-1} = I_3 = A$. Les matrices sont non seulement semblables, mais même égales.

8. (a) On considère n endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ base de E tels que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(n) = N$.

On a $n^3 = 0$ et $\text{rg}(n) = \text{rg}(N) = 2$ donc on peut appliquer la question 3 : il existe une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice de n est U .

Et U et N sont semblables car elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Mais alors V est la matrice de $n^2 - n$, qui est donc semblable à M .

(b) Par formule du binôme, comme N et N^2 commutent :

$$M^3 = (N^2 - N)^3 = N^6 - 3N^5 + 3N^4 - N^3 = 0$$

(tout est multiple de N^3 , et $N^3 = 0$).

Et comme V et M sont semblables, elles ont même rang, donc $\text{rg}(M) = 2$.

(c) La matrice M vérifie $M^3 = 0$ et $\text{rg}(M) = 2$, donc par le même raisonnement qu'à la question précédente : M et U sont semblables.

Par transitivité de la relation de similitude, on déduit que M et N sont semblables (elles sont toutes les deux semblables à U).

(d) Notons $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $N = Q^{-1}MQ$. Alors :

$$I_3 + N = I_3 + Q^{-1}MQ = Q^{-1}Q + Q^{-1}MQ = Q^{-1}(I_3 + M)Q$$

donc $I_3 + N$ et $I_3 + M$ sont semblables.

Mais A est semblable à $I_3 + N$ comme $A = P(I_3 + N)P^{-1}$. Et A^{-1} est semblable à $I_3 + M$ comme $A^{-1} = P(I_3 - N + N^2)P^{-1} = P(I_3 + M)P^{-1}$.

Et à nouveau par transitivité : A et A^{-1} sont semblables.

9. On procède comme à la question précédente. On obtient les mêmes conditions qu'à la question 4, et on déduit que N et M sont toutes les deux semblables à U' .

On déduit comme ci-dessus que N et M sont semblables, puis $I_3 + N$ et $I_3 + M$ sont semblables, et finalement A et A^{-1} sont semblables.

10. (a) Par définition, on a :

$$u : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y + 2z \end{pmatrix}.$$

(b) On résout : pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(u - \text{id}) \Leftrightarrow u(x, y, z) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -z \\ z = y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow y = -z \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, -y).$$

et donc :

$$\text{Ker}(u - \text{id}) = \{(x, y, -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est bien une base, car constituée de deux vecteurs non proportionnels.

(c) On pourrait montrer que la famille est libre. Pour changer, regardons plutôt la matrice de la famille (e_1, e_2, c) dans la base (a, b, c) qui est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est inversible (matrice triangulaire ne comportant que des coefficients non nuls sur la diagonale). Ce qui assure bien que (e_1, e_2, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Par définition, on a $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = e_2$. Et on a également :

$$u(c) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -e_2 + c$$

donc la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) On a les hypothèses du début de partie satisfaites, avec A semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui correspond au cas $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma = -1$, qui donne donc le cas où $\text{rg}(N) = 1$.
Et ainsi : A et A^{-1} sont semblables.