# DM n$^o$5

Pour tout le problème, on considère $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On note 0 aussi bien la matrice nulle que l'endomorphisme nul, le vecteur nul ou le scalaire nul (s'il n'y a pas d'ambiguïté).

## I Endomorphismes nilpotents en dimension 3

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On fixe $i, j \in \mathbb{N}$. On pose $v$ l'application définie sur $\mathrm{Ker}u^{i+j}$ par $v : x \mapsto u^j(x)$.
   (a) Justifier que $v$ est linéaire.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}v \subset \mathrm{Ker}u^i$. L'application $v$ est-elle un endomorphisme de $\mathrm{Ker}u^{i+j}$ ?
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}v \subset \mathrm{Ker}u^j$.
   (d) En déduire que : $\dim(\mathrm{Ker}u^{i+j}) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}u^i) + \dim(\mathrm{Ker}u^j)$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) \leqslant 2$. Que penser du cas où $\mathrm{rg}(u) = 0$ ?
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 2$.
   (a) En utilisant la question 1, montrer que : $\dim(\mathrm{Ker}u^2) = 2$ ou 3.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}u^2 \neq E$, et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}u^2$.
   *Indication :* on pourra procéder par l'absurde.
   (c) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(u^2(x), u(x), x)$ est une base de $E$.
   (d) Écrire dans cette base la matrice $U$ de $u$ et la matrice $V$ de $u^2 - u$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 1$.
   (a) On veut montrer que $u^2 = 0$. Par l'absurde, on suppose $u^2 \neq 0$.
      i. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), u^2(x))$ est libre. Que penser de la famille $(u(x), u^2(x))$ ?
      ii. Conclure.
   (b) Montrer que l'on peut trouver $b \in E$ tel que $u(b) \neq 0$.
   (c) Justifier qu'il existe $c \in \mathrm{Ker}u$ tel que $(u(b), c)$ est une base de $\mathrm{Ker}u$. Et en déduire que $(b, u(b), c)$ est une base de $E$.
   (d) Écrire dans cette base la matrice $U$ de $u$ et la matrice $V$ de $u^2 - u$.

## II Une matrice unipotente de taille $3\times3$ est semblable à son inverse

On considère pour cette partie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que $A$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ fixés. Et on note $N = T - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

5. Montrer que $A$ est inversible.
6. Calculer $N^3$ est montrer que : $A^{-1} = P\,(I_3 - N + N^2)\,P^{-1}$.
7. On suppose à cette question que $N = 0$. Montrer que $A$ et $A^{-1}$ sont semblables. Que valent-elles ?
8. On suppose ici que $\mathrm{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.
   (a) En utilisant la question 3, montrer que $N$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et en déduire une matrice semblable à $M$.

(b) Calculer $M^3$ et déterminer $\mathrm{rg}(M)$. En déduire une matrice semblable à $M$.

(c) Montrer que $M$ et $N$ sont semblables.

(d) Montrer que $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.

9. On suppose ici que $\mathrm{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.

10. On se propose de traiter un exemple. On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note $(a, b, c)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à $A$.

(a) Donner l'expression de $u(x, y, z)$ pour $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, et en donner une base (que l'on notera $(e_1, e_2)$).

(c) Justifier que $(e_1, e_2, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice de $u$ dans cette base.

(d) Montrer que $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.