DM n^{o}4 : corrigé
Deux algorithmes de résolution d'équation

Exercice 1 1. (a) On suppose que g est k-lipschitzienne dans I. On propose deux démonstrations de la continuité de g :

— avec des ε : Pour tout $x \in I$, et tout $\varepsilon > 0$:

$$|y-x| \leqslant \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow |g(y)-g(x)| \leqslant k|y-x| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui montre que g est continue en x.

— par manipulation de limites : fixons $a \in I$. Alors

$$|g(x)-g(a)| \leqslant k|x-a|$$

et donc par encadrement : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. Donc g est continue en a.

(b) Montrons d'abord l'existence d'un point fixe. Considérons la fonction définie dans I

$$\varphi : x \to g(x) - x$$

Elle est continue comme somme de deux fonctions continues et la stabilité de I par g entraine

$$\begin{gathered} g(a) \geqslant a \text{ donc } \varphi(a) \geqslant 0 \\ g(b) \leqslant a \text{ donc } \varphi(b) \leqslant 0 \end{gathered}$$

Lorsque l'une des deux inégalités précédentes est une égalité, a ou b est un point fixe. Lorsque les deux inégalités sont strictes, on peut appliquer le théorème de la valeur intermédiaire à φ entre a et b. Il existe donc un $x \in]a,b[$ tel que $\varphi(x) = 0$, c'est à dire un point fixe pour g. Montrons maintenant l'unicité d'un point fixe. Si x et y sont deux points fixes :

$$|x-y| = |g(x)-g(y)| \leqslant k|x-y| \Rightarrow (1-k)|x-y| \leqslant 0 \Rightarrow x = y$$

car $1-k > 0$ par hypothèse.

2. (a) On applique n fois l'inégalité de lipschitzianité :

$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| =& |\ g\left(x_{n-1} - g(\alpha)\right| \leqslant k|x_{n-1}-\alpha| = k|g\left(x_{n-2} - g(\alpha)\right| \\ &\leqslant k^2\left|x_{n-2}-\alpha\right| \leqslant \cdots \leqslant k^p\left|x_{n-p}-\alpha\right| \leqslant k^n\left|x_0-\alpha\right| = k^n|u-\alpha| \end{aligned}$$

La suite à droite de l'inégalité précédente est géométrique de raison $k \in]0,1[$. Elle converge donc vers 0 ce qui permet d'appliquer le théorème d'encadrement. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

(b) Utilisons d'abord l'inégalité triangulaire

$$|x_{n+p}-x_n| \leqslant |x_{n+p}-x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1}-x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1}-x_n| = \sum_{i=0}^{p-1} |x_{n+1+i}-x_{n+i}|$$

puis majorons comme plus haut en utilisant le caractère lipschitzien

$$\begin{gathered} |x_{n+1+i}-x_{n+i}| = \left|g\left(x_{n+i}\right) - g\left(x_{n+i-1}\right)\right| \leqslant k\left|x_{n+i}-x_{n+i-1}\right| \\ \leqslant \cdots \leqslant k^i\left|x_{n+1}-x_n\right| \end{gathered}$$

En injectant dans la première majoration, on obtient :

$$|x_{n+p}-x_n| \leqslant \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^i\right)|x_{n+1}-x_n| = \frac{1-k^p}{1-k}\left|x_{n+1}-x_n\right|$$

(c) Dans l'inégalité précédente, fixons n et considèrons les suites en p. La suite $(x_{n+p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers α, la suite $(x_n)_{p\in\mathbb{N}}$ est constante, la suite $(k^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 . Par opérations sur les suites convergentes et passage à la limite dans une inégalité, on obtient donc :

$$|\alpha - x_n| \leqslant \frac{1}{1-k}\,|x_{n+1} - x_n|$$

3. (a) Comme g est supposée dérivable en α, on peut écrire :

$$|g'(\alpha)| = \left|\lim_{h\to 0}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}\right| \leqslant k$$

d'après le théorème de passage à la limite dans une inégalité.

(b) Par définition de x_n et de α :

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = \frac{g\left(x_n\right)-g(\alpha)}{x_n-\alpha} \to g'(\alpha)$$

par définition de la dérivabilité en α car la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point fixe α.

Exercice 2 4. Par hypothèse, la fonction est dérivable et de dérivée strictement négative sur $[a, b]$, donc f est strictement décroissante et continue sur $[a, b]$. Comme de plus $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[a, b]$, qui ne peut être ni a ni b par hypothèse. D'où le résultat.

5. Ladite tangente a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. L'abscisse β du point d'intersection de l'axe des abscisses et de cette tangente vérifie donc l'équation $f'(x_0)(\beta - x_0) + f(x_0) = 0$, donc $\beta = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

6. g est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que différence et quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas (en effet, f étant $\mathcal{C}^2$, f' est $\mathcal{C}^1$). Par ailleurs, pour tout $x \in [a, b]$:
$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$
Notamment, $g(\alpha)$ et $g'(\alpha) = 0$.

7. Les fonctions f' et f'' sont continues sur le segment $[a, b]$, donc sont bornées et atteignent leurs bornes. Par ailleurs, f' est à valeurs strictement négatives sur $[a, b]$, donc $|f'|$ est à valeurs strictement positives. On en déduit l'existence des deux réels cherchés.

8. f' est continue sur $[a, b]$ donc y est bornée. Soit $L > 0$ tel que pour tout $t \in [a, b], |f'(t)| \leqslant L$. Alors, par inégalité des accroissements finis, on a bien : $\forall t \in [a, b], |f(t) - f(\alpha)| = |f(t)| \leqslant L|t - \alpha|$.

9. Soit $x \in [a, b]$. Pour tout $t \in [a, b]$, on a $|g'(t)| = \frac{|f(t)||f''(t)|}{|f'(t)^2|}$, et on sait que $|f''(t)| \leqslant M$ et $\frac{1}{|f'(t)|^2} \leqslant \frac{1}{m^2}$. D'après la question précédente, on en déduit donc la majoration : $|g'(t)| \leqslant \frac{ML}{m^2}|t - \alpha|$.
Supposons maintenant $x < \alpha$ et choisissons $t \in [x, \alpha]$. On a notamment $|t - \alpha| < |x - \alpha|$ donc $|g'(t)| \leqslant \frac{ML}{m^2}|x - \alpha|$. Par inégalité des accroissements finis appliquées à g entre x et α : $|g(x) - g(\alpha)| \leqslant \frac{ML}{m^2}|x - \alpha|(\alpha - x)$. Puisque enfin $g(\alpha) = \alpha$, on a donc :
$$|g(x) - \alpha| \leqslant \frac{ML}{m^2}|x - \alpha|^2$$
On procède de même pour $x > \alpha$. Pour $x = \alpha$, l'inégalité est directe (c'est $0 \leqslant 0$).

10. Il suffit de prendre h tel que $Kh < 1$ (donc $h < \frac{1}{K}$ et tel que $I \subset [a, b]$. Puisque $\alpha \in]a, b[$, en posant $\varepsilon = \min(\frac{\alpha - a}{2}, \frac{b - \alpha}{2})$ et $h \leqslant \min(\frac{1}{K+1}, \varepsilon)$, on a ce qu'on veut.

11. On a, pour $x \in I \subset [a, b], |g(x) - \alpha| \leqslant K|x - \alpha|^2$ d'après la question 6. De plus $|x - \alpha| \leqslant h$, donc $|g(x) - \alpha| \leqslant Kh \times h < h$ car $Kh < 1$. Donc $g(x) \in]\alpha - h, \alpha + h[\subset I$.

12. Puisque $x_0 \in J$ et puisque J est stable par g, l'existence et l'unicité de la suite (x_n) en découle.

13. Par récurrence, assez directe d'après l'inégalité établie en question 9.

14. Par encadrement, le résultat en découle.

15. On a d'abord f de classe $\mathcal{C}^2$, $f(1) > 0, f(3) < 0$ et f' strictement négative sur $[1, 3]$, on peut donc bien appliquer ce qui précède à f. Ici, $\alpha = \sqrt{3}$ et on peut choisir $m = 2, L = 6$ et $M = 2$ (par simples calculs sur les dérivées première et seconde de f). Donc $K = 3$. En posant $h = 0,3$, on a bien $Kh < 1$ et $[\alpha - h, \alpha + h] \subset [1, 3]$.

16. On a $2 \in [\sqrt{3} - h, \sqrt{3} + h]$, donc d'après ce qui précède, la suite est bien définie.

17. C'est un cas particulier de la question 13 dans ce cas.

18. Il suffit de choisir N tel que $\frac{1}{3}(0,9)^{2^N} \leqslant 10^{-100}$. Une application numérique montre que $N = 12$ convient.

19. La méthode de dichotomie coupant à chaque fois l'intervalle en deux, il s'agit de trouver un entier N' tel que $\frac{1}{2^{N'}} \leqslant 10^{-100}$. Cette fois, $N' = 334$ convient, ce qui semble montrer que la méthode de Newton est bien plus efficace. En pratique, c'est le cas et la méthode de Newton est encore à la base de tout un tas d'applications pratiques en ingénierie et ailleurs...