DM n^{o}3 : à rendre pour le 9 décembre

Exercice 1 Une fonction injective

1. Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Soit $y \in f(A\cap B)$. Cela signifie donc qu'on peut trouver $x \in A\cap B$ tel que $y = f(x)$. Notamment, un tel x est dans A, donc $y \in f(A)$, et de même, $y \in f(B)$. Ainsi, $y \in f(A) \cap f(B)$. On a bien montré que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante égale à 2024. Considérons également $A = \{0\}$ et $B = \{1\}$. Alors $A \cap B = \emptyset$, donc $f(A \cap B) = \emptyset$. Mais $f(A) = f(B) = \{2024\}$. L'inclusion réciproque n'est donc bel et bien pas vérifiée.
3. Raisonnons par double implication :
   - Supposons que f est injective. Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Soit $y \in f(A)\cap f(B)$. Cela signifie donc qu'on peut trouver un $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$ et un $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$. On a $y = f(x_1) = f(x_2)$, et par injectivité de f, on a donc $x_1 = x_2$. Donc $x_1 \in A \cap B$, et $y = f(x_1) \in f(A \cap B)$. On a bien montré que $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$.
   - Supposons que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Soit $x, y \in E$. Supposons que $x \neq y$. Considérons $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. On a donc $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$. On a donc $f(A)\cap f(B) = \{f(x)\}\cap\{f(y)\} = \emptyset$, ce qui signifie que $f(x) \neq f(y)$. Par contraposée, on a bien montré que f est injective.
     On pouvait aussi raisonner directement : en supposant cette fois $f(x) = f(y)$, avec encore $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$, on a $f(A) \cap f(B) = \{f(x)\} \subset f(A \cap B)$, ce qui veut dire qu'il existe $t \in A \cap B$ tel que $f(x) = f(t)$. Notamment, $A \cap B \neq \emptyset$, et vu les définition de A et B, cela signifie que $x = y$.

   D'où l'équivalence demandée.

Exercice 2 Une fonction surjective

1. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. Considérons $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$. Cela signifie qu'il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Par définition de $f^{-1}(B)$, $y = f(x) \in B$. D'où l'inclusion.
2. Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction carré. Un carré de réel étant toujours positif ou nul, on a l'égalité $f(f^{-1}(\mathbb{R}_-^*)) = f(\emptyset) = \emptyset$: l'inclusion $\mathbb{R}_-^* \subset \emptyset$ est fausse ($\mathbb{R}_-^*$ n'est pas vide), donc le résultat n'est pas vrai en général.
3. Raisonnons là encore par double implication :
   - Supposons f surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. Soit $y \in B$. Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et par définition de y, un tel x est dans $f^{-1}(B)$. Donc $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$. D'où l'inclusion demandée.
   - Supposons que pour tout $B \in \mathcal{P}(F), B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$. Soit $y \in F$. Avec $B = \{y\}$, l'inclusion donne
     $$\{y\} \subset f\left(f^{-1}(\{y\})\right)$$
     ce qui signifie qu'il existe $x \in f^{-1}(\{y\})$, donc dans E, tel que $y = f(x)$. Ainsi, f est surjective.
     On pouvait aussi raisonner en déterminant directement $\mathrm{Im} f$: en appliquant la propriété vérifiée avec $B = F$, on obtient $F \subset f(f^{-1}(F))$ et donc $F \subset \mathrm{Im} f$, puis $F = \mathrm{Im} f$ (l'autre inclusion étant acquise par définition de $\mathrm{Im} f$). Ainsi, f est surjective.

   D'où l'équivalence demandée.

Exercice 3 Une fonction bijective

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Résolvons l'équation $f(z) = \omega$ d'inconnue $z \in E$.
   Pour tout $z \in E$, on a :
$$\begin{aligned} f(z) = \omega & \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2} = \omega \\ & \Leftrightarrow z+1 = z\omega - 2\omega \text{ car } z \neq 2 \\ & \Leftrightarrow z(\omega - 1) = 2\omega + 1 \end{aligned}$$
   et on a alors deux cas :
   — si $\omega = 1$: l'équation devient $0 = 3$, qui n'admet pas de solution ; donc 3 n'admet pas d'antécédent par f ;
   — si $\omega \neq 1$: alors :
$$f(z) = \omega \Leftrightarrow z = \frac{2\omega+1}{\omega-1}$$
   et donc l'équation $f(z) = \omega$ admet pour unique solution $\frac{2\omega+1}{\omega-1}$, c'est-à-dire qu'un tel ω possède un unique antécédent par f, qui est $\frac{2\omega+1}{\omega-1}$.

   Et ainsi : f réalise une bijection de E dans $F = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, c'est-à-dire que $a = 1$ avec les notations de l'énoncé.
   De plus, $g = f^{-1}$ est définie par :
$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} F = \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & E = \mathbb{C} \setminus \{2\} \\ \omega & \mapsto & \dfrac{2\omega+1}{\omega-1} \end{array} \right. .$$
   Remarque : on pouvait aussi noter que $f(z) = \frac{z+1}{z-2} = \frac{z-2+3}{z-2} = 1 + \frac{3}{z-2}$ avec $\frac{3}{z-2}$ toujours non nul, ce qui donne très rapidement $a = 1$.

2. Étude des images directes et réciproques de $\mathbb{R}$.
   (a) Par opérations sur les conjugués, pour tout $z \in E$, on a :
$$\overline{f(z)} = \frac{\overline{z+1}}{\overline{z-2}} = \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-2} = f(\overline{z})$$
   (b) On utilise que, si $z \in \mathbb{C}$, alors : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$. Et ainsi pour tout $z \in E$:
$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{f(z)} = f(z) \Leftrightarrow f(\overline{z}) = f(z) \Leftrightarrow \overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$
   où :
   — la deuxième équivalence provient de la question précédente ;
   — la troisième équivalence découle de l'injectivité de f (comme f est bijective, donc injective) ;
   — les deux autres sont la caractérisation de l'appartenance à $\mathbb{R}$ par la conjugaison.

   (c) Par définition, on a : $f(\mathbb{R} \cap E) = \{f(z) \mid z \in \mathbb{R} \cap E\}$.
   Par la question précédente, on a donc :
$$f(\mathbb{R} \cap E) = \{f(z) \mid f(z) \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Im} f \cap \mathbb{R} = F \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$
   Pour l'image réciproque, on a :
$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in E \mid f(z) \in \mathbb{R}\} = \{z \in E \mid z \in \mathbb{R}\} = E \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

3. Étude des images directes et réciproque du cercle et du disque unité : on rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$, et on pose de plus $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ le disque ouvert de centre 0 de rayon 1.
   (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :
$$|z+1|^2 = (z+1)(\overline{z}+1) = z\overline{z} + z + \overline{z} + 1 \text{ et } |z-2|^2 = (z-2)(\overline{z}-2) = z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 4.$$
   (b) Pour $z \in E$, on a :
$$\begin{array}{rcl} z \in f^{-1}(\mathbb{U}) & \Leftrightarrow & f(z) \in \mathbb{U} \\ & \Leftrightarrow & |f(z)| = 1 \\ & \Leftrightarrow & |z+1| = |z-2| \\ & \Leftrightarrow & |z+1|^2 = |z-2|^2 \\ & \Leftrightarrow & z + \overline{z} = 1 \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2} \end{array}$$
   et donc :
$$f^{-1}(\mathbb{U}) = \{z \in E \,|\, \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\} = \{\frac{1}{2} + ib \,|\, b \in \mathbb{R}\}.$$
   Pour $\mathbb{D}$, on fait de même et on trouve :
$$z \in f^{-1}(\mathbb{D}) \Leftrightarrow |f(z)| < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}$$
   et donc :
$$f^{-1}(\mathbb{D}) = \{z \in E \,|\, \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}\} = \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a < \frac{1}{2}\}.$$
   Remarque : cela se comprend bien géométriquement : il s'agit pour la première image réciproque de la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ dans le plan, qui est la médiatrice du segment d'extrémités les points d'affixes -1 et 2. Or, pour $z \in \mathbb{C}$, les modules $|z+1|$ et $|z-2|$ représentent respectivement les distances de z à ces deux points, et ces distances sont égales si, et seulement si, z est sur la médiatrice mentionnée. Et les points à gauche sont plus proches de -1, ce qui est cohérent avec l'écriture de $f^{-1}(\mathbb{D})$.
   (c) Comme $g = f^{-1}$, alors $f = g^{-1}$ et ainsi $f(\mathbb{U}) = g^{-1}(\mathbb{U})$ et $f(\mathbb{D}) = g^{-1}(\mathbb{D})$.
   Avec le même type de calculs, on a pour tout $\omega \in F$:
$$\omega \in f(\mathbb{U}) \Leftrightarrow |2\omega + 1|^2 = |\omega - 1|^2 \Leftrightarrow |\omega|^2 + 2\mathrm{Re}(\omega) = 0$$
   où on fait apparaître une sorte de forme canonique pour obtenir :
$$\omega \in f(\mathbb{U}) \Leftrightarrow |\omega + 1|^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow |\omega + 1| = 1$$
   et donc :
$$f(\mathbb{U}) = \{-1 + e^{i\theta} \,|\, \theta \in]-\pi; \pi]\}$$
   qu'on peut réécrire par formule de l'angle moitié, mais qui décrit surtout le cercle de rayon 1 et dont le centre a pour affixe -1.
   Pour $\mathbb{D}$, on obtient de même :
$$\omega \in f(\mathbb{D}) \Leftrightarrow |\omega + 1| < 1$$
   et donc :
$$f(\mathbb{D}) = \{-1 + re^{i\theta} \,|\, \theta \in]-\pi; \pi] \text{ et } r \in [0; 1[\}$$
   qui est le disque ouvert de centre 1 et dont le centre a pour affixe -1 (le disque ouvert dont le bord est le cercle précédent).