DM n^{o}2

I Problèmes de rédaction

- On justifie toujours la dérivabilité d'une fonction avant de donner sa dérivée.
- On annonce la bonne formule : si on calcule la dérivée par la formule de la dérivée d'un quotient, on ne dit pas qu'on la calcule par dérivée d'une composée.
- Pour justifier qu'un quotient est défini ou dérivable, il faut toujours préciser que le dénominateur ne s'annule pas. Sinon c'est faux.
- On ne mélange pas une fonction et sa valeur en un point. Ce qui veut dire :
  - On écrit "f est dérivable", et **SURTOUT PAS** "$f(x)$ est dérivable".
  - On écrit que la dérivée de f est : $f' : x \mapsto \ldots$. Ou bien que la dérivée de f vérifie : $\forall x \in \ldots,\ f'(x) = \ldots$. Et pas "$f$ est dérivable de dérivée $f'(x) = \ldots$" (ce qui n'a pas de sens).
  - On écrit "f est croissante" (décroissante, etc.) et **SURTOUT PAS** "$f(x)$ est croissante".
- On justifie **TOUJOURS** qu'une quantité est non nulle avant de diviser par elle. Et on vérifie même son signe si on veut diviser dans une inégalité.
- Un "donc" et un "$\Rightarrow$" n'ont pas le même sens :
  - le "donc" présuppose que ce qui est avant est vrai, et annonce que ce qui est après l'est aussi ; le $\Rightarrow$ ne présuppose ni n'annonce aucune valeur de vérité ;
  - l'implication $A \Rightarrow B$, si elle a été prouvée, peut être utiliser **SEULEMENT** pour :
    - montrer que B est vraie : mais cela demande de montrer que A est vraie ;
    - montrer que A est fausse : mais cela demande de montrer que B est fausse.
- Le même constat est valable avec les équivalences. La différence est que, si on a montré que $A \Leftrightarrow B$ est vraie, on peut montrer que l'une des deux assertions A ou B est :
  - vraie, en montrant que l'autre est vraie ;
  - fausse, en montrant que l'autre est fausse.
- Beaucoup de copies ne répondent pas vraiment aux questions. Une question à laquelle la copie ne répond pas clairement, et dont la réponse n'est pas mise en valeur, ne rapportera plus aucun point.
- Quand on utilise un théorème, il faut bien préciser son nom et ses hypothèses : pour le théorème de la bijection monotone, il faut bien dire que la fonction est continue, strictement monotone sur un intervalle I, et calculer les limites/valeurs au bord de I pour donner l'intervalle image.
- Les variables ne sont pas bien introduites :
  - si on veut manipuler un réel x, on commence par "soit $x \in \mathbb{R}$" (par exemple pour montrer la parité d'une fonction) ;
  - cela n'a pas de sens d'écrire "$f'(x) \neq 0$ sur $]-1;+\infty[$" : il faut écrire "f' ne s'annule pas sur $]-1;+\infty[$" ou "pour tout $x \in]-1;+\infty[$, on a : $f'(x) \neq 0$" ;
  - une quantité qui dépend d'une variable doit faire apparaître cette variable. Par exemple le taux d'accroissement d'une fonction entre $x \neq 0$ et 0 s'écrit : $\tau_0(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et il faut faire apparaître x.
- Il ne suffit pas de dériver une égalité pour la prouver : si on veut montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$ en dérivant, il faut **OBLIGATOIREMENT** :
  - justifier la dérivabilité de f et de g sur I ;
  - vérifier que I est un intervalle et que, sur I, $f' = g'$ (et ainsi $f - g$ est constante sur I) ;
  - trouver un élément $x \in I$ tel que : $f(x) = g(x)$.
- Une fonction dérivable est continue et **LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE**. Et toute fonction dérivable n'est pas $\mathcal{C}^1$: il faut aussi que sa dérivée soit continue pour cela.
- Pour beaucoup de copies, la structure des arguments est à revoir. Il faut essayer de faire un argument par ligne, avec un enchaînement logique clair (alors que beaucoup d'enchaînements logiques ne sont pas bien justifiés, et semblent sortir de nulle part).
- L'orthographe laisse à désirer dans trop de copies, même sur des mots qu'on utilise beaucoup en maths.

II Points particuliers pour certaines questions

Exercice 1 1. La parité ou l'imparité sont déjà des symétries : il n'y a rien à ajouter.

2. Dérivabilité mal justifiée. Pour la classe $\mathcal{C}^1$, on veut une justification propre de la continuité de f'.
3. La limite de f est 0 est bien calculée, mais mal justifiée.
4. (a) Justification trop complexes pour la dérivabilité de φ : elle est directement $\mathcal{C}^\infty$.
   (b) Question mal lue : il faut bien le signe de φ''' (qui est immédiat), et on déduit ensuite variation **puis** signe des dérivées précédentes. L'enchainement logique n'est pas clair dans les copies. Beaucoup trop d'erreurs de calcul qui n'étaient pourtant pas difficiles.
   (c) L'inégalité n'était pas dans le même sens sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, sinon on aurait $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \frac{x^3}{6}$ (choquant comme $x \mapsto x^3$ être connue).
   (d) Certains n'ont pas de forme indéterminée pour la limite du taux d'accroissement de f en 0 : si on veut calculer une dérivée en un point, on aura **TOUJOURS** une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ (sinon la fonction n'est pas continue, donc pas dérivable).
5. Manipulation d'inégalités pas toujours bien justifiées (notamment les divisions). Et il fallait les inverser pour $x \in \mathbb{R}_-$, sinon on trouvait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \frac{x}{6}$.
6. On avait déjà annoncé que f était $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, donc dans cette question on attendait seulement deux choses : f est dérivable en 0 (donné par la 4) et f' est continue en 0 (donné par la 5, avec théorème des gendarmes). Ces deux points n'apparaissent pas clairement, et sont mal justifiés.

Exercice 2 1. Trop annoncent le résultat sans le justifier.

2. Signe de la dérivée parfois mal justifié.
3. Il fallait utiliser (deux fois) le théorème de la bijection monotone, ce qui demandait d'invoquer le théorème de la bijection monotone (à nommer), et donc d'annoncer la continuité de f (à justifier) et les limites de f aux bornes des intervalles considérés (d'après les variations étudiées à la question précédente). Et on justifie bien par les résultats, et non par la preuve ou la manière d'énoncer les résultats : ce sont les variations qui justifient, et pas le tableau de variations ou la preuve qu'on en a faite.
4. (a) Il faut bien dire que f est dérivable et que la **dérivée** de f ne s'annule pas pour justifier la dérivabilité de g. Tout autre argument est inutile, et faux.
   (b) Résultat à connaître, souvent mal dit.
   (c) Il fallait utiliser que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_J$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_I$ (pour f bijective de I dans J), ce qui était bien utilisé. En revanche, il faut bien justifier que tout était strictement positif pour appliquer ln.
   (d) Les deux inégalités se montraient séparément, et sortent un peu de nulle part dans les copies : l'une reposait sur les variations de g, et l'autre en utilisant ce résultat dans la question précédente. Lorsque l'on utilise une fonction réciproque, c'est bien (pour avoir une idée de son comportement) de dresser son tableau de variations : ici, le tableau de g se déduisait directement de celui de f.
   (e) Théorème d'encadrement en général bien justifié, mais les inégalités pour y arriver le sont moins (notamment le fait de diviser par $\ln(x)$). Les croissances comparées ne sont pas toujours invoquées pour la limite de $\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$ en $+\infty$.
5. Étude de h : sensiblement les mêmes remarques que pour g.
6. Question qui ne s'appuyait pas sur les résultats des questions 4 et 5, mais seulement sur les variations de f et les définitions de g et h. Il fallait bien invoquer les variations. Et le cas $\lambda = 0$ est souvent mal traité (il est à mettre avec le cas $\lambda \geqslant 0$ comme en $-\infty$ la fonction f tend vers 0 sans atteindre cette valeur.