

DM n°2 : à rendre pour le 14 octobre

Exercice 1 Une étude locale

L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Le dénominateur de f ne s'annule qu'en 0 : la fonction f est donc définie sur \mathbb{R}^* .

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$$

donc f est paire.

2. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}^* : elle est donc dérivable sur \mathbb{R}^* avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2}.$$

En tant que combinaison linéaire et produit de fonctions continues, la fonction $x \mapsto \cos(x) \cdot x - \sin(x)$ est continue sur \mathbb{R} , donc sur \mathbb{R}^* . Et la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur \mathbb{R} (polynôme), ne s'annulant qu'en 0, donc par quotient : f' est continue sur \mathbb{R}^* , c'est-à-dire que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

3. Pour $x \neq 0$, on a :

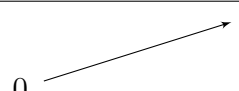
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

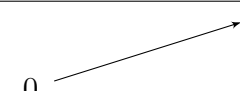
donc f admet une limite finie en 0 : elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

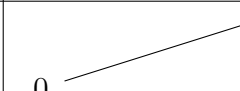
4. (a) En tant que combinaison linéaire de fonctions infiniment dérivables (sin et polynôme), φ est infiniment dérivable. Ses dérivées successives sont :

$$\varphi' : x \mapsto \cos(x) - 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \varphi'' : x \mapsto -\sin(x) + x \quad \text{et} \quad \varphi''' : x \mapsto -\cos(x) + 1.$$

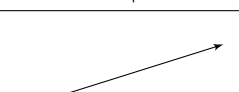
- (b) Par définition du cos, on a directement $\varphi''' \geq 0$ sur \mathbb{R} (ne s'annulant qu'en les $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). On déduit les variations de φ'' puis φ' puis φ sur \mathbb{R}_+ , ce qui donne les tableaux suivants :

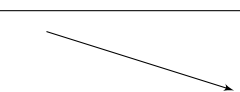
x	0	$+\infty$
φ'''	+	
φ''		


x	0	$+\infty$
φ''	+	
φ'		

x	0	$+\infty$
φ'	+	
φ		

et par parité on déduit les tableaux sur \mathbb{R}_- :

x	$-\infty$	0
φ'''	+	
φ''		

x	$-\infty$	0
φ''	-	
φ'		

x	$-\infty$	0
φ'	+	
φ		

où les valeurs en 0 sont calculées par les expressions explicites des fonctions.

(c) De $\varphi \geq 0$ et $\varphi'' \geq 0$ sur \mathbb{R}_+ , on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \text{ et } 0 \leq -\sin(x) + x$$

ce qui donne bien : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.

De $\varphi \leq 0$ et $\varphi'' \leq 0$ sur \mathbb{R}_- , on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, 0 \geq \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \text{ et } 0 \geq -\sin(x) + x$$

ce qui donne bien : $\forall x \in \mathbb{R}_-, x - \frac{x^3}{6} \geq \sin(x) \geq x$. (ce qu'on aurait aussi pu déduire par imparité, en multipliant l'inégalité précédente par -1).

(d) Pour la dérivabilité en 0, on passe par le taux d'accroissement. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} = \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

mais par la question précédente on a :

— si $x > 0$: $-\frac{x}{6} \leq \frac{\sin(x) - x}{x^2} \leq 0$, donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0 pour $x \rightarrow 0^+$ par encadrement ;

— si $x < 0$: $0 \leq \frac{\sin(x) - x}{x^2} \leq -\frac{x}{6}$, donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend aussi vers 0 pour $x \rightarrow 0^-$ par encadrement.

Et finalement : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par la question précédente, on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$. Et ainsi : $-x \leq -\sin(x) \leq -x + \frac{x^3}{6}$.

Donc : $\cos(x) \cdot x - x \leq \cos(x) \cdot x - \sin(x) \leq \cos(x) \cdot x - x + \frac{x^3}{6}$.

Et finalement (comme $x > 0$) :

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} \leq \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2} = f'(x) \leq \frac{\cos(x) - 1}{x} + \frac{x}{6}$$

Pour $x < 0$, on peut réinvoquer les inégalités précédentes et procéder comme pour $x > 0$, ou invoquer le caractère impaire des fonctions qui apparaissent, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \frac{\cos(x) - 1}{x} \geq \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2} = f'(x) \geq \frac{\cos(x) - 1}{x} + \frac{x}{6}$$

6. En reconnaissant un taux d'accroissement, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \cos'(0) = \sin(0) = 0$$

Et comme on a également : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{6} = 0$, on déduit par encadrement que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$$

La même méthode montre que : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$.

Et finalement : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Donc f' est continue en 0.

Comme on a déjà montré la continuité de f' sur \mathbb{R}^* , alors f' est continue sur \mathbb{R} : donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 2 Une étude globale

On considère $f : x \mapsto xe^x$.

1. La fonction f est le produit de $x \mapsto x$ et de la fonction \exp , toutes les deux définies sur \mathbb{R} , donc f est définie sur \mathbb{R} .
2. En tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , f est dérivable sur \mathbb{R} avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $(x+1)$, ce qui donne les variations suivantes :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	\searrow		$-e^{-1}$	\nearrow
					$+\infty$

dans lequel les limites sont données par :

- en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées ;
 - en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par produit (par de forme indéterminée).
3. La fonction f est continue (elle est dérivable sur \mathbb{R}). Sa dérivée est positive sur $[-1; +\infty[$, ne s'annulant qu'en -1 , donc f est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$: par théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ dans $[f(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-e^{-1}; +\infty[$.

De même, la dérivée de f est négative sur $] - \infty; -1]$, ne s'annulant qu'en -1 : par théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de $] - \infty; -1]$ dans $[f(-1); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [-e^{-1}; 0[$. Pour la suite, on note g la bijection réciproque de $f|_{[-1; +\infty[}$ et h celle de $f|_{] - \infty; -1]}$.

4. Étude de g :
 - (a) La fonction f est dérivable sur $[-1; +\infty[$, et sa dérivée ne s'annule qu'en -1 . Donc g est dérivable partout sauf en $f(-1) = -e^{-1}$, c'est-à-dire sur $] - e^{-1}; +\infty[$. Par dérivée d'une fonction réciproque, pour tout $x \in] - e^{-1}; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{f' \circ f(x)} = \frac{1}{(g(x) + 1)e^{g(x)}}$$

Mais pour un tel x , on a : $f(g(x)) = x$, donc $g(x)e^{g(x)} = x$. Et donc, si on suppose de plus $x \neq 0$ (donc $g(x) \neq 0$ comme $f(0) = 0$), alors : $e^{g(x)} = \frac{x}{g(x)}$.

En réinjectant cette valeur dans l'expression de $g'(x)$, on a bien pour un tel x non nul :

$$g'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + g(x))}.$$

- (b) Le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques assure que, comme $f'(-1) = 0$, alors g n'est pas dérivable en $f(-1) = -e^{-1}$ avec une demi-tangente verticale pour la courbe de g en son point d'abscisse $-e^{-1}$.
- (c) Pour tout $x > 0$, on a : $f(g(x)) = x$, donc $g(x)e^{g(x)} = x$. Comme tout est strictement positif, en appliquant la fonction \ln on déduit : $\ln(g(x)) + g(x) = \ln(x)$. Ce qui donne bien l'égalité demandée.

- (d) Comme f est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$, alors g est strictement croissante. Mais $f(1) = 1 \cdot e^1 = e$, donc $g(e) = 1$. Ainsi, par (stricte) croissante de $g : \forall x > e, g(x) > g(e) = 1$. Puis par croissance de $\ln : \forall x > e, \ln(g(x)) \geq \ln(1) = 0$.

En réinjectant cette inégalité dans le résultat de la question précédente, si $x > e$ on a :

$$g(x) = \ln(x) - \underbrace{\ln(g(x))}_{\geq 0} \leq \ln(x)$$

et on déduit la seconde inégalité par croissance de \ln .

- (e) On déduit des deux questions précédentes que, pour $x > e$:

$$\ln(x) - \ln(\ln(x)) \leq g(x) \leq \ln(x)$$

puis :

$$1 - \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \leq \frac{g(x)}{\ln(x)} \leq 1$$

Par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = 0$.

Par encadrement, on a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{\ln(x)} = 1$.

5. (a) De même que pour g , f' ne s'annulant pas sur $] -\infty; -1[$, alors h est dérivable sur $] -e^{-1}; 0[$ avec :

$$\forall x \in] -e^{-1}; 0[, h'(x) = \frac{1}{(1 + h(x))e^{h(x)}}.$$

On obtient la formule demandée en notant que, pour $x \in] -e^{-1}; 0[$, on a : $x = f(h(x)) = h(x)e^{h(x)}$.

- (b) Tout comme g , h n'est pas dérivable en $-e^{-1}$, avec une demi-tangente verticale en $-e^{-1}$, qui vient du fait que $f'(-1) = 0$.
- (c) Soit $x \in] -e^{-1}; 0[$. On a : $x = f(h(x)) = h(x)e^{h(x)}$. Et donc $(-x) = (-h(x)) \cdot e^{h(x)}$: tout est positif, donc on peut appliquer la fonction \ln , ce qui donne : $h(x) + \ln(-h(x)) = \ln(-x)$, et on a bien l'égalité demandée.
- (d) On a d'après les variations de $f : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$. Par définition de h , on a directement : $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$.
- (e) On reprend l'égalité de la question c. En divisant par $h(x) \neq 0$, on a :

$$\frac{h(x) + \ln(-h(x))}{h(x)} = 1 - \frac{\ln(-h(x))}{-h(x)} = \frac{\ln(-x)}{h(x)}$$

Par croissance comparées et composition, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(-h(x))}{-h(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Et ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(-x)}{h(x)} = 1. \text{ Et par quotient : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{\ln(-x)} = 1$$

6. D'après les variations de f , on trouve que :

- si $\lambda < -e^{-1}$: l'équation $f(x) = \lambda$ n'a aucune solution ;
- si $\lambda = -e^{-1}$: l'équation $f(x) = \lambda$ a pour unique solution $x = -1 = g(-e^{-1}) = h(-e^{-1})$;
- si $\lambda \in] -e^{-1}; 0[$: l'équation $f(x) = \lambda$ a deux solutions qui sont $h(\lambda) \in] -\infty; -1[$ et $g(\lambda) \in] -1; 0[$;
- si $\lambda \geq 0$: l'équation $f(x) = \lambda$ a pour unique solution $g(\lambda) \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 3 Une fonction définie implicitement (Facultatif)

1. Étudions les variations de P_t :

- en tant que fonction polynomiale, P_t est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée en $x \in \mathbb{R} : P_t'(x) = 5x^4 + t \geq t > 0$, donc P_t est strictement croissante si $t > 0$;
- P_t est un polynôme de degré impair, de coefficient dominant positif, donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_t(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_t(x) = +\infty$.

Par théorème de la bijection monotone, l'équation " $P_t(x) = 0$ " possède une unique solution dans \mathbb{R} (tout comme toute équation de la forme " $P_t(x) = a$ ", pour $a \in \mathbb{R}$).

2. Par définition de P_t , on a :

$$P_t(0) = -1 < 0 \text{ et } P_t(1) = 1 + t - 1 = t > 0$$

et donc, comme P_t est strictement croissante et que $P_t(f(t)) = 0$, alors : $f(t) \in]0; 1[$.

3. Prenons $0 < t_1 < t_2$, et notons $x_1 = f(t_1)$ et $f_2 = f(t_2)$. On a :

- la fonction P_{t_1} est strictement croissante sur \mathbb{R} ;
- $P_{t_1}(x_1) = 0$ (par définition de x_1) ;
- par définition de x_2 :

$$P_{t_1}(x_2) = x_2^5 + t_1 x_2 - 1 = \underbrace{(x_2^5 + t_2 x_2 - 1)}_{=0} + \underbrace{(t_1 - t_2)}_{<0} \underbrace{x_2}_{>0} < 0$$

et donc : $x_2 < x_1$. Donc f est bien strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

4. (a) On a :

- pour tout $t > 0 : f(t) \in]0; 1[$, donc $f(t)^5 \in]0; 1[$ et finalement : $(1 - f(t)^5) \in]0; 1[$;
- pour tout $t > 0 : f(t)^5 + t f(t) - 1 = 0$, et donc : $f(t) = \frac{1 - f(t)^5}{t}$.

Ainsi, pour tout $t > 0 : 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$, donc par encadrement $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

(b) On utilise à nouveau la définition de $f(t)$, qui assure pour tout $t > 0$ que :

$$t f(t) = 1 - f(t)^5 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1 - 0^5 = 1$$

ce qui est bien le résultat voulu.

5. (a) En notant $l = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$, on a :

$$0 = f(t)^5 + t f(t) - 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} l^5 + 0 \cdot l - 1 = l^5 - 1$$

et donc $l^5 = 1$, donc $l = 1$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $h : x \mapsto x^n$. La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $x \mapsto x^{n-1}$. En particulier, elle est dérivable en 1 de nombre dérivée : $h'(1) = n$. On a donc :

$$n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(1+x) - h(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$$

et donc la limite cherchée vaut n .

(c) Comme $f(t) = 1 + (f(t) - 1)$, il est clair que $1 - f(t)^5 = 1 - (1 + (f(t) - 1))^5$. On trouve ainsi que, pour $t > 0$:

$$\frac{f(t) - 1}{1 - f(t)^5} = - \frac{f(t) - 1}{(1 + (f(t) - 1))^5 - 1} = - \frac{1}{\frac{(1+x)^5 - 1}{x}}$$

où $x = f(t) - 1$. Comme $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$, alors on a bien que $\lim_{t \rightarrow 0} (f(t) - 1) = 0$, donc on peut appliquer le résultat de la question précédente, ce qui donne :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + (f(t) - 1))^5 - 1}{f(t) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^5 - 1}{x} = 5$$

et donc en composant avec la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - 1}{1 - f(t)^5} = -\frac{1}{5}.$$

(d) Pour la dérivabilité en 0, on regarde le taux d'accroissement en 0 de f . On a pour $t > 0$:

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{f(t) - 1}{t}$$

mais par définition de $f(t)$, on a pour $t > 0$: $t = \frac{1 - f(t)^5}{f(t)}$. Et ainsi pour $t > 0$:

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \underbrace{\frac{f(t) - 1}{1 - f(t)^5}}_{\rightarrow -\frac{1}{5}} \cdot \underbrace{f(t)}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\frac{1}{5}$$

Ainsi le taux d'accroissement de f entre 0 et t tend vers $-\frac{1}{5}$ pour t tendant vers 0, donc tend vers une limite finie : f est donc dérivable en 0, avec $f'(0) = -\frac{1}{5}$.

6. On sait déjà que f réalise une bijection strictement décroissante de \mathbb{R}_+^* sur $]0; 1[$.

Pour trouver une expression de sa réciproque, donnons-nous $x \in]0; 1[$ et $t > 0$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} f(t) = x &\Leftrightarrow x^5 + tx - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow tx = 1 - x^5 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{1 - x^5}{x} \end{aligned}$$

Et donc f est bien la bijection réciproque de la fonction g de l'énoncé.

7. La fonction g est dérivable sur $]0; 1[$, en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour $x \in]0; 1[$, on a :

$$g'(x) = \frac{-5x^4 \cdot x - (1 - x^5)}{x^2} = -\frac{1 + 4x^5}{x^2}$$

Au passage, on note que $g'(x) < 0$ sur $]0; 1[$, ce qui assure que g est bien décroissante (en accord avec le fait que g est la bijection réciproque d'une fonction décroissante).

Pour $x \in]0; 1[$, on a surtout que $g'(x) \neq 0$ (car le numérateur de g' ne s'annule jamais sur $]0; 1[$). Ceci assure que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et sa dérivée est donnée pour tout $t > 0$ par :

$$f'(t) = \frac{1}{(g' \circ f)(t)} = -\frac{f(t)^2}{1 + 4f(t)^5}$$

8. La fonction f étant dérivable, elle est continue. D'après l'expression de f' sur \mathbb{R}_+^* , on déduit que f' est elle-même continue sur \mathbb{R}_+^* . Comme f coïncide avec f sur \mathbb{R}_+^* , alors f est donc déjà \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . Il reste à vérifier ce qu'il se passe en 0.

On a $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$, et donc $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{f(t)^2}{1 + 4f(t)^5} = -\frac{1}{1 + 4} = -\frac{1}{5} = f'(0)$.

Donc finalement f' est continue sur \mathbb{R}_+ , donc f est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .