DM n^{o}2 : à rendre pour le 14 octobre

Exercice 1 Une étude locale

L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Le dénominateur de f ne s'annule qu'en 0 : la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
   $$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$$
   donc f est paire.
2. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$: elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2}.$$
   En tant que combinaison linéaire et produit de fonctions continues, la fonction $x \mapsto \cos(x)\cdot x - \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Et la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme), ne s'annulant qu'en 0, donc par quotient : f' est continue sur $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Pour $x \neq 0$, on a :
   $$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\to} \sin'(0) = \cos(0) = 1$$
   donc f admet une limite finie en 0 : elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
4. (a) En tant que combinaison linéaire de fonctions infiniment dérivables (sin et polynôme), φ est infiniment dérivable. Ses dérivées successives sont :
   $$\varphi' : x \mapsto \cos(x) - 1 - \frac{x^2}{2},\ \varphi'' : x \mapsto -\sin(x) + x \text{ et } \varphi''' : x \mapsto -\cos(x) + 1.$$
   (b) Par définition du cos, on a directement $\varphi''' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ (ne s'annulant qu'en les $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$). On déduit les variations de φ'' puis φ' puis φ sur $\mathbb{R}_+$, ce qui donne les tableaux suivants :

x	0		$+\infty$
φ'''		$+$	
φ''	0	$\nearrow$	

x	0		$+\infty$
φ''	0	$+$	
φ'	0	$\nearrow$	

x	0		$+\infty$
φ'	0	$+$	
φ	0	$\nearrow$	

et par parité on déduit les tableau sur $\mathbb{R}_-$:

x	$-\infty$		0
φ'''		$+$	
φ''		$\nearrow$	0

x	$-\infty$		0
φ''		$-$	0
φ'		$\searrow$	0

x	$-\infty$		0
φ'	0	$+$	
φ		$\nearrow$	0

où les valeurs en 0 sont calculées par les expressions explicites des fonctions.

(c) De $\varphi \geqslant 0$ et $\varphi'' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$, on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \text{ et } 0 \leqslant -\sin(x) + x$$

ce qui donne bien : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

De $\varphi \leqslant 0$ et $\varphi'' \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_-$, on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-,\ 0 \geqslant \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \text{ et } 0 \geqslant -\sin(x) + x$$

ce qui donne bien : $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ x - \dfrac{x^3}{6} \geqslant \sin(x) \geqslant x$. (ce qu'on aurait aussi pu déduire par imparité, en multipliant l'inégalité précédente par -1).

(d) Pour la dérivabilité en 0, on passe par le taux d'accroissement. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} = \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

mais par la question précédente on a :

— si $x > 0$: $-\dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} \leqslant 0$, donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0 pour $x \to 0^+$ par encadrement ;

— si $x < 0$: $0 \leqslant \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} \leqslant -\dfrac{x}{6}$, donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend aussi vers 0 pour $x \to 0^-$ par encadrement.

Et finalement : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par la question précédente, on a : $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$. Et ainsi : $-x \leqslant -\sin(x) \leqslant -x + \dfrac{x^3}{6}$.

Donc : $\cos(x) \cdot x - x \leqslant \cos(x) \cdot x - \sin(x) \leqslant \cos(x) \cdot x - x + \dfrac{x^3}{6}$.

Et finalement (comme $x > 0$) :

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} \leqslant \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2} = f'(x) \leqslant \frac{\cos(x) - 1}{x} + \frac{x}{6}$$

Pour $x < 0$, on peut réinvoquer les inégalités précédentes et procéder comme pour $x > 0$, ou invoquer le caractère impaire des fonctions qui apparaissent, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \frac{\cos(x) - 1}{x} \geqslant \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2} = f'(x) \geqslant \frac{\cos(x) - 1}{x} + \frac{x}{6}$$

6. En reconnaissant un taux d'accroissement, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \cos'(0) = \sin(0) = 0$$

Et comme on a également : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{6} = 0$, on déduit par encadrement que :

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$$

La même méthode montre que : $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$.

Et finalement : $\displaystyle\lim_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Donc f' est continue en 0.

Comme on a déjà montré la continuité de f' sur $\mathbb{R}^*$, alors f' est continue sur $\mathbb{R}$: donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Une étude globale

On considère $f : x \mapsto xe^x$.

1. La fonction f est le produit de $x \mapsto x$ et de la fonction exp, toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. En tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $(x+1)$, ce qui donne les variations suivantes :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

dans lequel les limites sont données par :
— en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées ;
— en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par produit (par de forme indéterminée).

3. La fonction f est continue (elle est dérivable sur $\mathbb{R}$). Sa dérivée est positive sur $[-1;+\infty[$, ne s'annulant qu'en -1, donc f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$: par théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ dans $[f(-1); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [-e^{-1};+\infty[$.

De même, la dérivée de f est négative sur $]-\infty;-1]$, ne s'annulant qu'en -1 : par théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de $]-\infty;-1]$ dans $[f(-1); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[= [-e^{-1};0[$. Pour la suite, on note g la bijection réciproque de $f_{|[-1;+\infty[}$ et h celle de $f_{|]-\infty;-1]}$.

4. Étude de g :
   (a) La fonction f est dérivable sur $[-1;+\infty[$, et sa dérivée ne s'annule qu'en 1. Donc g est dérivable partout sauf en $f(-1) = -e^{-1}$, c'est-à-dire sur $]-e^{-1};+\infty[$. Par dérivée d'une fonction réciproque, pour tout $x \in]-e^{-1};+\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{f' \circ f(x)} = \frac{1}{(g(x)+1)e^{g(x)}}$$

Mais pour un tel x, on a : $f(g(x)) = x$, donc $g(x)e^{g(x)} = x$. Et donc, si on suppose de plus $x \neq 0$ (donc $g(x) \neq 0$ comme $f(0) = 0$), alors : $e^{g(x)} = \dfrac{x}{g(x)}$.

En réinjectant cette valeur dans l'expression de $g'(x)$, on a bien pour un tel x non nul :

$$g'(x) = \frac{g(x)}{x(1+g(x))}.$$

   (b) Le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques assure que, comme $f'(-1) = 0$, alors g n'est pas dérivable en $f(-1) = -e^{-1}$ avec une demi-tangente verticale pour la courbe de g en son point d'abscisse $-e^{-1}$.
   (c) Pour tout $x > 0$, on a : $f(g(x)) = x$, donc $g(x)e^{g(x)} = x$. Comme tout est strictement positif, en appliquant la fonction ln on déduit : $\ln(g(x)) + g(x) = \ln(x)$. Ce qui donne bien l'égalité demandée.

(d) Comme f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$, alors g est strictement croissante. Mais $f(1) = 1 \cdot e^1 = e$, donc $g(e) = 1$. Ainsi, par (stricte) croissante de g : $\forall x > e,\ g(x) > g(e) = 1$. Puis par croissance de ln : $\forall x > e,\ \ln(g(x)) \geqslant \ln(1) = 0$.

En réinjectant cette inégalité dans le résultat de la question précédente, si $x > e$ on a :

$$g(x) = \ln(x) - \underbrace{\ln(g(x))}_{\geqslant 0} \leqslant \ln(x)$$

et on déduit la seconde inégalité par croissance de ln.

(e) On déduit des deux questions précédentes que, pour $x > e$:

$$\ln(x) - \ln(\ln(x)) \leqslant g(x) \leqslant \ln(\mathrm{x})$$

puis :

$$1 - \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \leqslant \frac{g(x)}{\ln(x)} \leqslant 1$$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = 0$.

Par encadrement, on a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{\ln(x)} = 1$.

5. (a) De même que pour g, f' ne s'annulant pas sur $]-\infty;-1[$, alors h est dérivable sur $]-e^{-1};0[$ avec :

$$\forall x \in]-e^{-1};0[,\ h'(x) = \frac{1}{(1+h(x))e^{h(x)}}.$$

On obtient la formule demandée en notant que, pour $x \in]-e^{-1};0[$, on a : $x = f(h(x)) = h(x)e^{h(x)}$.

(b) Tout comme g, h n'est pas dérivable en $-e^{-1}$, avec une demi-tangente verticale en $-e^{-1}$, qui vient du fait que $f'(-1) = 0$.

(c) Soit $x \in]-e^{-1};0[$. On a : $x = f(h(x)) = h(x)e^{h(x)}$. Et donc $(-x) = (-h(x)) \cdot e^{h(x)}$: tout est positif, donc on peut appliquer la fonction ln, ce qui donne : $h(x) + \ln(-h(x)) = \ln(-x)$, et on a bien l'égalité demandée.

(d) On a d'après les variations de f : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$. Par définition de h, on a directement : $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = -\infty$.

(e) On reprend l'égalité de la question c. En divisant par $h(x) \neq 0$, on a :

$$\frac{h(x) + \ln(-h(x))}{h(x)} = 1 - \frac{\ln(-h(x))}{-h(x)} = \frac{\ln(-x)}{h(x)}$$

Par croissance comparées et composition, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(-h(x))}{-h(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Et ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(-x)}{h(x)} = 1$. Et par quotient : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{h(x)}{\ln(-x)} = 1$

6. D'après les variations de f, on trouve que :

- si $\lambda < -e^{-1}$: l'équation $f(x) = \lambda$ n'a aucune solution ;
- si $\lambda = -e^{-1}$: l'équation $f(x) = \lambda$ a pour unique solution $x = -1 = g(-e^{-1}) = h(-e^{-1})$;
- si $\lambda \in]-e^{-1};0[$: l'équation $f(x) = \lambda$ a deux solutions qui sont $h(\lambda) \in]-\infty;-1[$ et $g(\lambda) \in]-1;0[$;
- si $\lambda \geqslant 0$: l'équation $f(x) = \lambda$ a pour unique solution $g(\lambda) \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 3 Une fonction définie implicitement (Facultatif)

1. Étudions les variations de P_t :
   - en tant que fonction polynomiale, P_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée en $x \in \mathbb{R}$: $P_t'(x) = 5x^4 + t \geqslant t > 0$, donc P_t est strictement croissante si $t > 0$;
   - P_t est un polynôme de degré impair, de coefficient dominant positif, donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} P_t(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_t(x) = +\infty$.

   Par théorème de la bijection monotone, l'équation "$P_t(x) = 0$" possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ (tout comme toute équation de la forme "$P_t(x) = a$", pour $a \in \mathbb{R}$).
2. Par définition de P_t, on a :
$$P_t(0) = -1 < 0 \text{ et } P_t(1) = 1 + t - 1 = t > 0$$
   et donc, comme P_t est strictement croissante et que $P_t(f(t)) = 0$, alors : $f(t) \in]0;1[$.
3. Prenons $0 < t_1 < t_2$, et notons $x_1 = f(t_1)$ et $f_2 = f(t_2)$. On a :
   - la fonction P_{t_1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
   - $P_{t_1}(x_1) = 0$ (par définition de x_1) ;
   - par définition de x_2 :
$$P_{t_1}(x_2) = x_2^5 + t_1 x_2 - 1 = \underbrace{(x_2^5 + t_2 x_2 - 1)}_{=0} + \underbrace{(t_1 - t_2)}_{<0} \underbrace{x_2}_{>0} < 0$$
   et donc : $x_2 < x_1$. Donc f est bien strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. (a) On a :
   - pour tout $t > 0$: $f(t) \in]0;1[$, donc $f(t)^5 \in]0;1[$ et finalement : $(1 - f(t)^5) \in]0;1[$;
   - pour tout $t > 0$: $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$, et donc : $f(t) = \dfrac{1 - f(t)^5}{t}$.

   Ainsi, pour tout $t > 0$: $0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{1}{t}$, donc par encadrement $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

   (b) On utilise à nouveau la définition de $f(t)$, qui assure pour tout $t > 0$ que :
$$tf(t) = 1 - f(t)^5 \underset{t \to +\infty}{\to} 1 - 0^5 = 1$$
   ce qui est bien le résultat voulu.
5. (a) En notant $l = \lim\limits_{t \to 0} f(t)$, on a :
$$0 = f(t)^5 + tf(t) - 1 \underset{t \to 0}{\to} l^5 + 0 \cdot l - 1 = l^5 - 1$$
   et donc $l^5 = 1$, donc $l = 1$.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $h : x \mapsto x^n$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto x^{n-1}$. En particulier, elle est dérivable en 1 de nombre dérivée : $h'(1) = n$. On a donc :
$$n = \lim_{x \to 0} \frac{h(1+x) - h(1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$$
   et donc la limite cherchée vaut n.

   (c) Comme $f(t) = 1 + (f(t) - 1)$, il est clair que $1 - f(t)^5 = 1 - (1 + (f(t) - 1))^5$. On trouve ainsi que, pour $t > 0$:
$$\frac{f(t) - 1}{1 - f(t)^5} = -\frac{f(t) - 1}{(1 + (f(t) - 1))^5 - 1} = -\frac{1}{\dfrac{(1+x)^5 - 1}{x}}$$

où $x = f(t) - 1$. Comme $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$, alors on a bien que $\lim_{t\to 0}(f(t)-1) = 0$, donc on peut appliquer le résultat de la question précédente, ce qui donne :

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1+(f(t)-1))^5 - 1}{f(t)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-1}{x} = 5$$

et donc en composant avec la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-1}{1-f(t)^5} = -\frac{1}{5}.$$

(d) Pour la dérivabilité en 0, on regarde le taux d'accroissement en 0 de f. On a pour $t > 0$:

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{f(t)-1}{t}$$

mais par définition de $f(t)$, on a pour $t > 0$: $t = \dfrac{1-f(t)^5}{f(t)}$. Et ainsi pour $t > 0$:

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \underbrace{\frac{f(t)-1}{1-f(t)^5}}_{\to -\frac{1}{5}} \cdot \underbrace{f(t)}_{\to 1} \underset{t\to 0}{\to} -\frac{1}{5}$$

Ainsi le taux d'accroissement de f entre 0 et t tend vers $-\frac{1}{5}$ pour t tendant vers 0, donc tend vers une limite finie : f est donc dérivable en 0, avec $f'(0) = -\frac{1}{5}$.

6. On sait déjà que f réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0;1[$.
Pour trouver une expression de sa réciproque, donnons-nous $x \in]0;1[$ et $t > 0$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} f(t) = x \quad &\Leftrightarrow \quad x^5 + tx - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad tx = 1 - x^5 \\ &\Leftrightarrow \quad t = \frac{1-x^5}{x} \end{aligned}$$

Et donc f est bien la bijection réciproque de la fonction g de l'énoncé.

7. La fonction g est dérivable sur $]0;1[$, en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour $x \in]0;1[$, on a :

$$g'(x) = \frac{-5x^4 \cdot x - (1-x^5)}{x^2} = -\frac{1+4x^5}{x^2}$$

Au passage, on note que $g'(x) < 0$ sur $]0;1[$, ce qui assure que g est bien décroissante (en accord avec le fait que g est la bijection réciproque d'une fonction décroissante).
Pour $x \in]0;1[$, on a surtout que $g'(x) \neq 0$ (car le numérateur de g' ne s'annule jamais sur $]0;1[$. Ceci assure que f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et sa dérivée est donnée pour tout $t > 0$ par :

$$f'(t) = \frac{1}{(g' \circ f)(t)} = -\frac{f(t)^2}{1+4f(t)^5}$$

8. La fonction f étant dérivable, elle est continue. D'après l'expression de f' sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit que f' est elle-même continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme f coïncide avec f sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f est donc déjà $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Il reste à vérifier ce qu'il se passe en 0.
On a $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$, et donc $\lim_{t\to 0} f'(t) = \lim_{t\to 0} -\dfrac{f(t)^2}{1+4f(t)^5} = -\dfrac{1}{1+4} = -\dfrac{1}{5} = f'(0)$.
Donc finalement f' est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.