DM n^{o}2 : à rendre pour le 14 octobre

Exercice 1 Une étude locale

L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f et étudier ses symétries.
2. Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition, et donner sa dérivée. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$?
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera pour la suite f ce prolongement, et on précisera bien la valeur de $f(0)$.
4. On souhaite pour cette question étudier la dérivabilité du prolongement de f en 0 :
   (a) On pose $\varphi : x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$. Justifier que φ est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer φ', φ'' et φ'''.
   (b) Étudier le signer de φ'''. En déduire les variations puis le signe de φ'', puis φ' puis φ.
   (c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant x - \sin(x) \leqslant \frac{x^3}{6}$. Quelle inégalité obtient-on pour $x \in \mathbb{R}_-$?
   (d) En déduire que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\cos(x)-1}{x} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{\cos(x)-1}{x} + \frac{x}{6}$. Que devient cette inégalité pour $x \in \mathbb{R}_-^*$?
   Indication : on pourra utiliser une inégalité de la question précédente.
6. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Une étude globale

On considère $f : x \mapsto xe^x$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que f réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ sur $[-e^{-1};+\infty[$. Montrer qu'elle réaliste également une bijection de $]-\infty;-1]$ sur $[-e^{-1};0[$.
   Pour la suite, on note g la bijection réciproque de $f_{|[-1;+\infty[}$ et h celle de $f_{|]-\infty;-1]}$.
4. Étude de g :
   (a) Justifier que g est dérivable sur $]-e^{-1};+\infty[$, et que :
   $$\forall x \in]-e^{-1};0[\cup]0;+\infty[,\ g'(x) = \frac{g(x)}{x(1+g(x))}.$$
   (b) La fonction g est-elle dérivable en $-e^{-1}$? Quelle particularité présente la courbe de g en son point d'abscisse $-e^{-1}$?
   (c) Justifier que : $\forall x > 0,\ g(x) = \ln(x) - \ln(g(x))$.
   (d) Montrer que : $\forall x > e,\ 0 \leqslant \ln(g(x)) \leqslant \ln(\ln(x))$.
   (e) En déduire l'existence et la valeur de : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{\ln(x)}$.
5. Étude de h :

(a) Justifier que h est dérivable sur $]-e^{-1};0[$ et que

$$\forall x \in]-e^{-1};0[,\ h'(x) = \frac{h(x)}{x(1+h(x))}.$$

(b) La fonction h est-elle dérivable en $-e^{-1}$? Quelle particularité présente la courbe de h en son point d'abscisse $-e^{-1}$?

(c) Justifier que : $\forall x \in]-e^{-1};0[$, on a $h(x) = \ln(-x) - \ln(-h(x))$.

(d) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = -\infty$.

(e) En déduire l'existence et la valeur de : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{h(x)}{\ln(-x)}$.

Indication : on pourra faire apparaître un résultat de croissances comparées.

6. Discuter, suivant la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, du nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$, et les exprimer à l'aide de g et h.

Exercice 3 Une fonction définie implicitement (Facultatif)

Pour $t > 0$, on note P_t la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par : $P_t(x) = x^5 + tx - 1$.

1. Soit $t > 0$ fixé. Montrer que l'équation $P_t(x) = 0$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) possède une unique solution. On note pour la suite $f(t)$ cette solution, c'est-à-dire que l'on définit la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \text{l'unique solution de l'équation } P_t(x) = 0 \end{array} \right.$$

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $f(t) \in]0;1[$.
3. Montrer que f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
On admet pour la suite que f possède des limites **finies** en 0 et en $+\infty$ (qui découle du théorème de la limite monotone), et même que ces limite sont dans $[0;1]$.
4. Étude de f au voisinage de $+\infty$:
   (a) Montrer que : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
   (b) Montrer que : $\lim\limits_{t\to+\infty} tf(t) = 1$.
5. Étude de f au voisinage de 0 :
   (a) Montrer que : $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 1$. On notera pour la suite encore f le prolongement par continuité en 0 de f, qui est une fonction continue sur $[0;+\infty[$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$.
   (c) En déduire que : $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)-1}{1-f(t)^5}$. On pourra commencer par remarquer que $1 - f(t)^5 = 1 - (1 + (f(t)-1))^5$.
   (d) Montrer que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\frac{1}{5}$.
6. Montrer que f est la bijection réciproque de la fonction g suivante :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0;1[& \to &]0;+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{1-x^5}{x} \end{array} \right.$$

7. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et exprimer, pour tout $t > 0$, la quantité $f'(t)$ en fonction de $f(t)$.
8. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.