DM n^{o}1 : corrigé

Exercice 1 Quelques questions indépendantes

1. Soit $x \in [1;+\infty[$. Alors :
$$\sqrt{x}+\sqrt{x-1} > \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x+(x-1)+2\sqrt{x(x-1)} > x+1$$
(par stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$) et donc :
$$\sqrt{x}+\sqrt{x-1} > \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-1)} > 2-x$$
et on résout cette dernière inéquation par disjonction de cas :
   - si $x>2$: alors $2-x<0$ et $2\sqrt{x(x-1)} \geqslant 0$, donc l'équation est vérifiée ; donc tout élément de $]2;+\infty[$ est solution ;
   - si $x \leqslant 2$: alors $2-x \geqslant 0$, et par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ on a :
   $$2\sqrt{x(x-1)} > 2-x \Leftrightarrow 4x(x-1) > x^2-4x+4 \Leftrightarrow x^2 > \frac{4}{3} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
   où la dernière équivalence vient du fait que $x \geqslant 1$, donc $x \geqslant 0$. Et donc les $x \leqslant 2$ solutions forment l'ensemble $\left]\frac{2\sqrt{3}}{3};2\right]$.

   Conclusion : l'ensemble solution est $\left]\frac{2\sqrt{3}}{3};2\right] \cup]2;+\infty[= \left]\frac{2\sqrt{3}}{3};+\infty\right[$.

2. Considérons l'expression $(2m-1)x^2-2x+4m-3$. On procède par disjonction de cas :
   - si $2m-1=0$, c'est-à-dire $m=\frac{1}{2}$: alors $(2m-1)x^2-2x+4m-3=-2x-1$ qui est une expression affine non constante (de pente -2), donc change de signe, donc on ne peut avoir $(2m-1)x^2-2x+4m-3>0$ pour tout x ;
   - si $2m-1 \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq \frac{1}{2}$: alors $(2m-1)x^2-2x+4m-3$ est une expression polyomiale du second degré, dont on veut qu'elle soit toujours positive. C'est le cas si, et seulement si, elle est :
     - de coefficient dominant strictement positif, donc $2m-1>0$, c'est-à-dire $m>\frac{1}{2}$;
     - de discriminant strictement négatif, donc $\Delta = 4-4(2m-1)(4m-3) = -32m^2+40m-8 = 8(-4m^2+5m-1) = -8(4m-1)(m-1) < 0$. On reconnaît un trinôme du second degré de coefficient dominant négatif, qui est donc négatif à l'extérieur de ses racines. Donc $m<\frac{1}{4}$ ou $m>1$.

     Et les deux conditions sont réunies si, et seulement si : $m>1$.

   Donc finalement l'inégalité $(2m-1)x^2-2x+4m-3>0$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $m>1$.

3. On procède par disjonction de cas pour éliminer les valeurs absolues. Soit $x \in \mathbb{R}$:
   - si $x<-2$: alors :
   $$\begin{cases} x-3 & < & 0 \\ x+2 & < & 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} |x-3| & = & 3-x \\ |x+2| & = & -x-2 \end{cases}$$
   puis :
   $$|x-3|+|x+2|<6 \Leftrightarrow 3-x-x-2<6 \Leftrightarrow -2x<5 \Leftrightarrow x>-\frac{5}{2}$$
   qui admet pour solution $\left]-\frac{5}{2};-2\right[$ dans $]-\infty;-2[$;

— si $-2 \leqslant x \leqslant 3$: alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x-3 & \leqslant & 0 \\ x+2 & \geqslant & 0 \end{array} \right. \text{ donc } \left\{ \begin{array}{rcl} |x-3| & = & 3-x \\ |x+2| & = & x+2 \end{array} \right.$$

puis :

$$|x-3|+|x+2|<6 \Leftrightarrow 3-x+x+2<6 \Leftrightarrow 5<6$$

qui est toujours vraie, donc qui admet pour solution $[-2;3]$ dans cet intervalle ;

— si $3 < x$: alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x-3 & > & 0 \\ x+2 & > & 0 \end{array} \right. \text{ donc } \left\{ \begin{array}{rcl} |x-3| & = & x-3 \\ |x+2| & = & x+2 \end{array} \right.$$

puis :

$$|x-3|+|x+2|<6 \Leftrightarrow x-3+x+2<6 \Leftrightarrow 2x-1<6 \Leftrightarrow 2x<7 \Leftrightarrow x<\frac{7}{2}$$

qui admet pour solution $\left]3;\frac{7}{2}\right[$ dans $]3;+\infty[$;

Conclusion : l'ensemble solution est $\left]-\frac{5}{2};-2\right[\cup [-2;3] \cup \left]3;\frac{7}{2}\right[= \left]-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right[$.

4. On procède par disjonction de cas :
   — si $n \leqslant 0$: alors $2^n > 0$ et $n \leqslant 0$ donc $2^n > n$, et l'assertion est vérifiée ;
   — montrons par récurrence que l'assertion est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$:
      — pour $n=1$: $2^n = 2 > 1 = n$, donc l'assertion est vraie pour $n=1$;
      — soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n > n$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} 2^{n+1} & = & 2 \cdot 2^n \\ & > & 2 \cdot n \text{ par hypothèse de récurrence} \\ & = & n+n \\ & \geqslant & n+1 \text{ comme } n \in \mathbb{N}^* \text{ donc } n \geqslant 1 \end{array}$$

      donc $2^{n+1} > n+1$, ce qui conclut l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence.

   D'où l'assertion par disjonction de cas.

5. Montrons le résultat par récurrence double :
   — pour $n=0$: $u_0 = 1$ et $2^0 \cdot (1-0) = 1$ donc le résultat est vrai au rang 0 ;
   — pour $n=1$: $u_1 = 0$ et $2^1 \cdot (1-1) = 0$ donc le résultat est vrai au rang 1 ;
   — hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^n(1-n)$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}(1-(n+1)) = -2^{n+1}n$. Alors :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n = -4 \cdot 2^{n+1} \cdot n - 4 \cdot 2^n \cdot (1-n)$$

$$= 2^{n+2}\left(-2n-(1-n)\right) = 2^{n+2}(-1-n) = 2^{n+2}\left(1-(n+2)\right)$$

   et on retrouve bien l'égalité à montrer au rang $n+2$, ce qui prouve l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence double.

6. On procède par analyse-synthèse :
   — analyse : considérons une telle fonction f. Alors :
      — avec $x=y=1$: la condition vérifiée devient $f(1) = f(1) + f(1)$ donc $f(1) = 0$;

— avec $x \in \mathbb{R}$ quelconque et $y = 1$: la condition vérifiée devient : $f(x) = xf(x) + f(1) = xf(x)$ (comme $f(1) = 0$) ; et ainsi on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1-x)f(x) = 0 \text{ donc } f(x) = 0 \text{ ou } (1-x) = 0$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) = 0$$

Et finalement, si une telle fonction existe, alors **nécessairement** c'est la fonction nulle ;

— synthèse : il faut encore vérifier que la fonction nulle est bien solution au problème. Posons f la fonction nulle. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(xy) = 0 \text{ et } xf(x) + yf(y) = x \cdot 0 + y \cdot 0 = 0$$

et donc une telle fonction est bien solution.

Par analyse-synthèse, on conclut que l'unique fonction qui vérifie la condition imposée est la fonction nulle.

Exercice 2 [Des mathématiciens rentrent dans un bar...]

On note n_1, n_2 les âges des deux étudiants. On va procéder par conditions nécessaires pour déterminer n_1 et n_2.

Notons déjà que, le barman ne s'opposant pas à la consommation des étudiants, on a : $n_1 \geqslant 18$ et $n_2 \geqslant 18$.

Par la phrase 1., on déduit que $n_1 \geqslant 19$, ce que l'on montre par l'absurde.
Supposons par l'absurde que $n_1 < 19$. Alors $n_1 = 18$. Mais alors $n_2 = 17$ ou 19. Mais $n_2 = 17$ est interdit. Donc $n_2 = 19$. Donc le premier étudiant connaît les deux ages. D'où la contradiction avec sa réponse.

Par la phrase 2., on déduit que $n_2 \geqslant 20$, ce que l'on montre encore par l'absurde.
Supposons par l'absurde que $n_2 < 20$. Le même raisonnement que ci-dessus impose que $n_2 \geqslant 19$, donc $n_2 = 19$. Mais alors $n_1 = 18$ ou 20. Donc $n_1 = 20$. Donc le second étudiant connaît les deux ages. D'où la contradiction avec sa réponse.

Par la phrase 3., on déduit que $n_1 \geqslant 21$, ce que l'on montre encore (décidément...) par l'absurde.
Supposons par l'absurde que $n_1 < 21$. Le même raisonnement que ci-dessus (on décale les réponses d'un cran) impose que $n_1 \geqslant 20$, donc $n_1 = 20$. Donc $n_2 = 19$ ou 21. Donc $n_2 = 21$. Donc le premier étudiant connaît les deux ages. D'où la contradiction avec sa réponse.

Par la phrase 4., on déduit que $n_2 \geqslant 22$, ce que l'on montre encore (comme par hasard...) par l'absurde.
Supposons par l'absurde que $n_2 < 22$. Le même raisonnement que ci-dessus (on décale encore les réponses d'un cran) impose que $n_2 \geqslant 21$, donc $n_2 = 21$. Donc $n_1 = 20$ ou 22. Donc $n_1 = 22$. Donc le second étudiant connaît les deux ages. D'où la contradiction avec sa réponse.

Par la phrase 5., on déduit que le premier étudiant est le plus jeune, ce que l'on montre encore (ça commence à être lassant) par l'absurde.
Supposons par l'absurde qu'il est plus vieux. On déduit que $n_1 = n_2 + 1 \geqslant 23$. Mais la seule information qu'il a (comme nous à ce stade) est que $n_2 \geqslant 22$, ce qui est compatible avec le fait d'être le plus jeune ou d'être le plus vieux. Il ne peut donc pas savoir s'il est le plus jeune ou le plus vieux. D'où la contradiction avec sa réponse.

Conclusion : le premier étudiant est le plus jeune. On sait aussi qu'il a 21 ou 22 ans (la même preuve que ci-dessus montre que $n_1 < 23$, et on a montré que $n_1 \geqslant 21$.

Remarques :

1. la phrase 6 (et toute la fin) ne servent à rien ici ;
2. on pourrait être tenté de faire un raisonnement par analyse-synthèse, mais c'est inutile ici : si l'on interprète notre raisonnement ci-dessus comme tel, on a en fait montré l'unicité de la solution à notre problème (nécessairement c'est le premier étudiant qui est le plus jeune). La partie existence n'a pas besoin de preuve : le simple fait que cette discussion existe assure l'existence d'une solution. Mais peut-être que cette situation n'a jamais existé...