DM n^{o}2 : corrigé

I Exercices

Exercice 1 [Recherche algébrique d'une bijection réciproque]

1. Les fonctions exp (fonction usuelle) et $x \mapsto -x$ (fonction affine) sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc leurs composées aussi. Par combinaison linéaire, la fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{-2x}}{2}\left(e^{2x} - 1\right)$$

qui est donc du signe de $(e^{2x} - 1)$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : positif sur $\mathbb{R}_+$ et négatif sur $\mathbb{R}_-$, ne s'annulant qu'en 0. On déduit les variations suivantes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ch$'$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites s'obtiennent par opérations sur les limites (il n'y a pas de formes indéterminées).
Par théorème de la bijection monotone, la fonction ch étant continue strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle réalise une bijection strictement croissante de $I = \mathbb{R}_+$ dans $J = [1; +\infty[$.

2. L'équation à considérer est une équation polynomiale du second degré. Son discriminant est $\Delta = 4m^2 - 4 = 4(m^2 - 1)$ et ainsi :
   — si $m \in]-1; 1[$ (c'est-à-dire $|m| < 1$) : alors $\Delta < 0$ et l'équation n'a pas de solution ;
   — si $m = \pm 1$: alors $\Delta = 0$ et l'équation possède pour unique solution $\boxed{x = m}$. Cette solution est donc strictement positive si $m = 1$, et strictement négative si $m = -1$;
   — si $m \notin [-1; 1]$: alors $\Delta > 0$ et l'équation admet deux solutions qui sont :

$$\boxed{x_1 = m + \sqrt{m^2 - 1} \text{ et } x_2 = m - \sqrt{m^2 - 1}}.$$

   Notons que l'on a $x_1 \cdot x_2 = (m + \sqrt{m^2 - 1})(m - \sqrt{m^2 - 1}) = m^2 - (m^2 - 1) = 1$, donc $x_1 = \dfrac{1}{x_2}$, donc x_1 et x_2 sont de même signe.
   Ce signe est d'ailleurs le signe de m : c'est clair pour x_1 si $m > 0$, et pour x_2 si $m < 0$, et on conclut comme ils sont de même signe.

3. (a) Soit $y \in J$ (c'est-à-dire $y \geqslant 1$). On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{ch}(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

   Posons $X = e^x \geqslant 0$. On cherche à résoudre l'équation en X (donc sur $\mathbb{R}_+^*$) suivante : $X^2 - 2yX + 1 = 0$.
   Par la question précédente, cette équation possède deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ si $y > 1$ (cas $m > 1$) qui sont :

$$X_0 = y + \sqrt{y^2 - 1} \text{ et } X_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}.$$

   et une seule si $y = 1$, à savoir : $X_1 = 1$.
   Et ainsi :

— si $y = 1$: $x_0 = \ln(X_0) =$0 est l'unique antécédent de 1 par ch ;

— si $y > 1$: y possède deux antécédents par ch, qui sont :

$$\boxed{x_1 = \ln(X_1) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \text{ et } x_2 = \ln(X_2) = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})}.$$

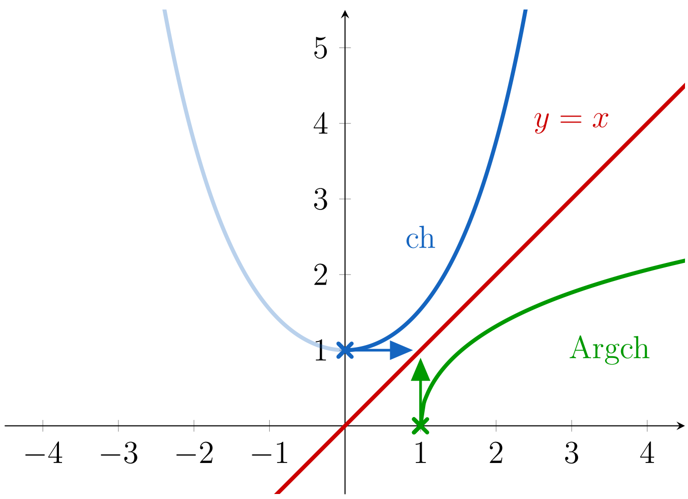
(b) Si $y = 1$, alors $1 \in I$ est son unique antécédent (dans $\mathbb{R}$ donc dans I).

Si $y > 1$, alors on a vu que $X_1 = \dfrac{1}{X_2}$ (avec les notations précédentes), et donc $x_1 = -x_2$. Il y a donc une unique solution dans I, qui est nécessairement x_1 comme $x_1 > x_2$. Et donc y a pour antécédent $\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ dans I.

Comme pour $y = 1$ on a : $\ln(y+\sqrt{y^2 - 1}) = \ln(1+\sqrt{0}) = \ln(1) = 0$, alors la formule précédente est même valable pour tout $y \in J$, c'est-à-dire que la restriction de ch à I possède pour bijection réciproque l'application :

$$\boxed{\text{Argch} : \left\{ \begin{array}{rcl} [1; +\infty[& \to & [0; +\infty[\\ y & \mapsto & \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \end{array} \right.}.$$

4. On trace les courbes de la restriction de ch à I et de sa réciproque. On fait figurer la tangente horizontale à la courbe de ch (en 0). Par croissances comparées, on remarque facilement que la courbe présente une branche parabolique d'axe vertical en $\pm\infty$ (comme exp). La courbe de la réciproque est obtenue par symétrie par rapport à la première bissectrice. Elle présente une (demi-)tangente verticale au point $(1, 0)$ (comme symétrique de la tangente à ch en 0), et une branche parabolique d'axe horizontal en $+\infty$ (comme ln).



Exercice 2 [Recherche algébrique d'une autre bijection réciproque]

On procède de la même manière. La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ par les mêmes arguments, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x) \geqslant 1 > 0$$

donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (c'est donc même plus facile). Il n'y a pas de formes indéterminées pour les limites, ce qui donne les variations suivantes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh′		$+$	1	$+$	
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Et donc la fonction sh réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour la bijection réciproque, on résout suivant la valeur de $y \in \mathbb{R}$ l'équation $\text{sh}(x) = y$ sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\text{sh}(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2yX - 1 = 0$$

en posant $X = e^x$, et on résout donc cette dernière équation sur $\mathbb{R}_+^*$. On reconnaît un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$, et on a donc deux solutions qui sont :

$$X_1 = y + \sqrt{y^2+1} > 0 \text{ et } X_2 = y - \sqrt{y^2+1}$$

où on utilise que, pour tout $y \in \mathbb{R}$: $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y|$ et donc :

$$X_1 > y + |y| \geqslant 0 \text{ et } X_2 < y - |y| \leqslant 0$$

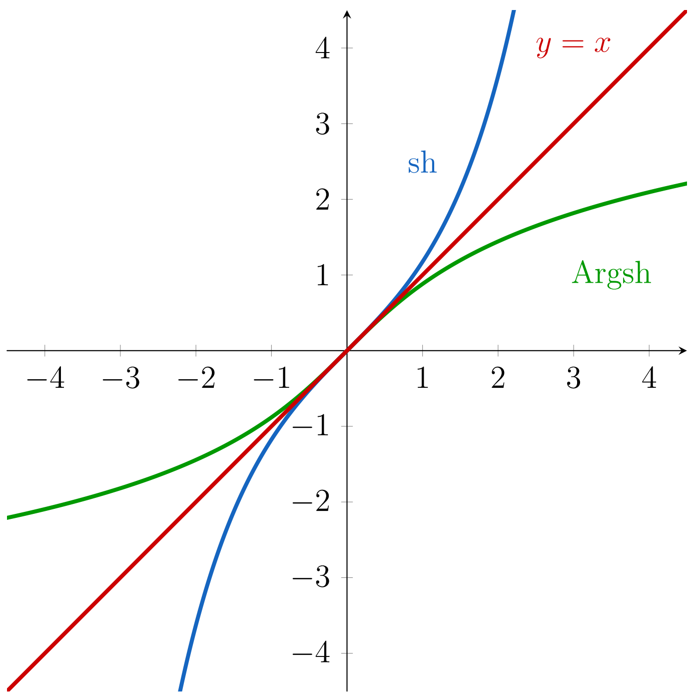
(on pouvait aussi voir que $X_1X_2 = -1$ donc l'une est strictement positive et l'autre strictement négative, et comme $X_1 > X_2$ c'est nécessairement que $X_1 > 0$)

Finalement, l'équation $\text{sh}(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, à savoir $x = \ln(X_1) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

La bijection réciproque de sh est l'application :

$$\boxed{\text{Argsh} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \end{array} \right.}.$$

Et on a le tracé suivant, sur lequel la première bissectrice est la tangente aux deux courbes au point $(0,0)$:



II Problème

II.1 Étude de la fonction tan

1. On a les équivalences pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0\ [\pi]} \text{ et } \boxed{\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]}.$$

   Ainsi, la fonction tan est définie là sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$, et elle s'annule sur $\{n\pi \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$.

2. La fonction tan est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout x de cet ensemble, on a :

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (-\sin(x) \cdot \sin(x))}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

3. Si $n \in \mathbb{Z}$, alors tan est bien définie sur l'intervalle $] - \frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[$. Sur cet intervalle, tan est continue (comme elle est dérivable) et on a $\tan' > 0$ (par la question précédente), donc tan y est strictement croissante. Étudions les limites de tan aux bornes de cet intervalle :
   — en $-\frac{\pi}{2} + n\pi$ (par valeurs supérieures) :
      — si n est pair : $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2} + n\pi} \sin(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2} + n\pi} \cos(x) = 0^+$, donc :

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2} + n\pi} \tan(x) = -\infty\ ;$$

      — si n est impair : $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2} + n\pi} \sin(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2} + n\pi} \cos(x) = 0^-$, donc :

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2} + n\pi} \tan(x) = -\infty.$$

   — en $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (par valeurs inférieures) : la même disjonction de cas donne :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + n\pi} \tan(x) = +\infty.$$

   On a donc bien le résultat demandé par théorème de la bijection monotone.

II.2 Signe et variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$

4. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Et donc, par dérivabilité d'un quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2}}.$$

5. (a) On a déjà que $f(0) \neq 0$. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0\ [\pi].$$

   et donc les nombres a_n sont : $\pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots$, c'est-à-dire que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = n\pi}$.

   (b) On a $f(0) = 1 > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ x \in [2k\pi; (2k+1)\pi].$$

   Et ainsi :

— $\boxed{f \text{ est strictement positive sur : } \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]2n\pi ; (2n+1)\pi[}$;

— $\boxed{f \text{ est nulle en les } a_n = n\pi, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*}$;

— $\boxed{f \text{ est strictement négative sur : } \bigcup_{n\in\mathbb{N}}](2n+1)\pi ; (2n+2)\pi[}$.

6. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors : $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $\dfrac{1}{x} > 0$. Donc on déduit par multiplication par $\dfrac{1}{x} > 0$ que :
$$-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$
(b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}$, on déduit par encadrement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (et donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$).

(c) Pour que $\pm\frac{1}{x}$ et $f(x)$ aient un sens, il faut que $x \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons un tel x. Alors :
$$f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \sin(x) = 1 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$
et donc les nombres b_n sont : $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ c'est-à-dire que :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi}.$$
De même, on trouve que les c_n sont : $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$, c'est-à-dire que :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \frac{3\pi}{2} + 2(n-1)\pi}.$$
(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

— on a $\sin(b_n) = 1$, donc $\cos(b_n) = -1$. On déduit ainsi que :
$$f'(b_n) = \frac{0-1}{(b_n)^2} = -\frac{1}{b_n^2} = h_+'(b_n).$$
Donc les tangentes en b_n à $\mathcal{H}_+$ et à $\mathcal{C}$ ont même pente. Comme on avait déjà par construction que $f(b_n) = \frac{1}{b_n} = h_+(b_n)$, alors les deux tangentes sont confondues (elles ont même pente et le point $(b_n, f(b_n))$ en commun).

— de même : $\sin(c_n) = -1$, donc $\cos(c_n) = -1$, donc :
$$f'(c_n) = \frac{0-(-1)}{(c_n)^2} = +\frac{1}{c_n^2} = h_-'(c_n)$$
et comme on a de même $f(c_n) = -\frac{1}{c_n} = h_-(c_n)$, on déduit que les tangentes à $\mathcal{H}_-$ et à $\mathcal{C}$ en c_n sont confondues.

7. (a) On considère la fonction $\psi : x \mapsto \tan(x) - x$. Elle est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ en tant que combinaison linéaire de fonctions qui le sont. Plus précisément, pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, on a :
$$\psi'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geqslant 0$$
donc ψ est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Comme tan ne s'annule qu'une fois sur cet intervalle (en 0), alors ψ' aussi, et ψ y est même strictement croissante.
Ainsi, pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on a :
$$\psi(x) > \psi(0) = \tan(0) - 0 = 0.$$
D'après l'expression de f' calculée en première question, pour un tel x on a donc :
$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{\cos(x)}{x^2} \cdot (x - \tan(x)) < 0.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons de nouveau la fonction ψ précédente, cette fois-ci sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi[$. Elle y est dérivable avec, pour tout x dans cet intervalle :

$$\psi'(x) = \tan^2(x) \geqslant 0$$

De même que précédemment, ψ' ne s'y annule qu'une fois (en $n\pi$), donc ψ est continue strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi[$. Reste à étudier ses limites aux bornes de cet intervalle :

— en $-\frac{\pi}{2}+n\pi$ (par valeurs supérieures) : par l'étude faire en *3.)* on a : $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+n\pi} \tan(x) = -\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+n\pi} x = \frac{\pi}{2}+n\pi$ est finie, on a donc :

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+n\pi} \psi(x) = -\infty.$$

— en $\frac{\pi}{2}+n\pi$ (par valeurs inférieures) : on trouve de la même manière que :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+n\pi} \psi(x) = +\infty.$$

Et ainsi $\boxed{\psi \text{ réalise une bijection strictement croissante de }]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi[\text{ sur } \mathbb{R}}$: en particulier, 0 possède un unique antécédent dans $]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi[$, ce qui justifie l'unicité de $x_n \in]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi[$ tel que $\psi(x_n) = 0$, c'est-à-dire tel que : $\tan(x_n) = x_n$.
Par la question *1.)* on a : $\tan(n\pi) = 0$, et donc : $\psi(n\pi) = -n\pi < 0 = \psi(x_n)$. Par stricte croissante de ψ sur $]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi[$, on a donc : $\boxed{x_n > n\pi}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'étude des variations de ψ, on a que :

$$\psi > 0 \text{ sur }]x_n; \frac{\pi}{2}+n\pi[\text{ et } \psi < 0 \text{ sur }]\frac{\pi}{2}+n\pi; x_{n+1}[.$$

Soit $x \in]x_n; x_{n+1}[$:

— si $x_n < x < \frac{\pi}{2}+n\pi$: alors $\cos(x) \neq 0$ et donc :

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2} = \frac{\cos(x)\cdot(x-\tan(x))}{x^2} = -\frac{\cos(x)\cdot\psi(x)}{x^2}$$

et comme $\psi(x) > 0$, alors $f'(x)$ est du signe opposé à celui de $\cos(x)$;

— si $x = \frac{\pi}{2}+n\pi$: alors :

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2} = -\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)}{x^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^2}$$

donc $f'(x)$ est du signe de $(-1)^{n+1}$;

— si $\frac{\pi}{2}+n\pi < x < x_{n+1}$: alors $\cos(x) \neq 0$ et donc :

$$f'(x) = -\frac{\cos(x)\cdot\psi(x)}{x^2}$$

et comme $\psi(x) < 0$, alors $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$.

Et finalement, on trouve que :

— si n est pair : alors $f' < 0$ sur $]x_n; x_{n+1}[$;
— si n est impair : alors $f' > 0$ sur $]x_n; x_{n+1}[$.

Remarque : on aurait pu aller un peu plus vite en utilisant les propriétés de régularité des fonctions circulaires : suivant l'expression de f', alors f' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, elle doit nécessairement s'annuler pour changer de signe. Or, elle ne s'annule qu'en les x_n, donc elle est de signe constant sur les intervalles $]x_n; x_{n+1}[$. Le calcul de $f'(\frac{\pi}{2}+n\pi)$ permet d'avoir ce signe, qui est bien celui trouvé précédemment.

II.3 Étude de f en 0

8. Reprenons la fonction φ de l'énoncé. Elle est infiniment dérivable, en tant que combinaison linéaire de sin et d'un polynôme. Ses dérivées successives sont données par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} \varphi'(x) &= \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \\ \varphi''(x) &= -\sin(x) + x \\ \varphi'''(x) &= -\cos(x) + 1 \end{cases}}.$$

9. Comme $\cos \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}_+$, on déduit que $\varphi''' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$, et ainsi on trouve les tableaux :

x	0	$+\infty$
φ'''	$+$	
φ''	0	$\nearrow$

x	0	$+\infty$
φ''	0	$+$
φ'	0	$\nearrow$

x	0	$+\infty$
φ'	0	$+$
φ	0	$\nearrow$

où les valeurs en 0 sont calculées par les expressions explicites des fonctions.
Et ainsi, on trouve que $\varphi \geqslant 0$ et $\varphi'' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \text{ et } 0 \leqslant -\sin(x) + x.$$

et en regroupant ces inégalités, on trouve la double inégalité demandée.

10. Si $x > 0$, le taux d'accroissement de f entre 0 et x est :

$$\tau_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} = \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

Par le résultat précédent, on a pour tout $x > 0$: $0 \leqslant \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} \leqslant \frac{x}{6}$. Et donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} \tau_0(x) = 0$ par encadrement. Ainsi, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
Comme une fonction dérivable est continue, cela assure aussi que f est continue en 0.

11. On a vu que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée : $x \mapsto \dfrac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2}$ qui est continue, en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
On a montré que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
Pour avoir le caractère $\mathcal{C}^1$ de f, il reste juste à montrer que f' est continue en 0, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = f'(0) = 0$. Or, pour tout $x > 0$ on a : $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$ et donc :

$$x \cdot (\cos(x) - 1) \leqslant \cos(x) \cdot x - \sin(x) \leqslant x \cdot (\cos(x) - 1) + \frac{x^3}{6}$$

et ainsi :

$$\boxed{\frac{\cos(x) - 1}{x} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{\cos(x) - 1}{x} + \frac{x}{6}}.$$

Et on a :
— en reconnaissant un taux d'accroissement : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$;
— par calcul direct : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{6} = 0$.
Et donc par encadrement : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Donc f' est continue en 0.
Et donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.

II.4 Tracé de $\mathcal{C}$

12. D'après les questions précédentes, on a le tableau de variations suivant :

x	0		x_1		x_2		3π
f'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

13. On a les courbes suivantes (où on a fait apparaître toutes les tangentes calculées, ainsi que les valeurs $x_1, x_2, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1$) :