Amphi 1:
Rappel de notions de base de topologie

Département de Mathématiques
École polytechnique

Remise en forme mathématique 2013

Espaces métriques

Soit X un ensemble et $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ une application.

Définition

On dit que d est une distance si

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (séparation)
2. $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
3. $\forall x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)

On dit que (X, d) est un espace métrique.

Exemples

- Sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $d(x, y) = |x - y|$ est une distance.
- Sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, $d_\infty(f, g) = \min(1, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|)$ est une distance appelée distance de la convergence uniforme.

Exemple fondamental de distance

Soit E un espace vectoriel sur $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}_+$.

Définition

On dit que $\mathcal{N}$ est une norme si

1. $\mathcal{N}(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$
2. $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in k$, $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$
3. $\forall x, y \in E$, $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$

On dit que $(E, \mathcal{N})$ est un espace vectoriel normé.

Pour $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = \mathcal{N}(x - y)$.

Propriété

Pour toute partie X de E alors (X, d) est un espace métrique.

Exemples de normes

- On peut munir $\mathbb{R}^2$ des normes suivantes :

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|, \quad \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$$

- On peut munir $\mathcal{C}([0, 1])$ des normes suivantes :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \quad , \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

- L'espace vectoriel ℓ_∞ des suites bornées peut être muni de la norme $\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.
- L'espace vectoriel ℓ_1 des suites sommables peut être muni de la norme $\|(u_n)\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Ouverts - fermés

Soit (X, d) un espace métrique. On appelle l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

la boule ouverte de centre x_0 de rayon r.

Définition

- $U \subset X$ est dit ouvert si $\forall x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.
- $F \subset X$ est fermé si son complémentaire $X - F$ est ouvert.

Exemples

- $\emptyset$ et X sont ouverts et fermés.
- Pour $x \in X$ et $r > 0$ alors $B(x, r)$ est un ouvert de X. En particulier, tout intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.

Topologie

Attention ! $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Propriétés

Soit I un ensemble, $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts.

- $\cup_{i\in I} U_i$ est un ouvert.
- Si I est fini alors $\cap_{i\in I} U_i$ est un ouvert.
- Si $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés, $\cap_{i\in I} F_i$ est un fermé. Si I est fini alors $\cup_{i\in I} F_i$ est un fermé.

Attention !

- $\bigcap_{\varepsilon>0}]-\varepsilon, \varepsilon[= \{0\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.
- $\bigcup_{n>0} [0, 1 - \frac{1}{n}] = [0, 1[$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Définition

La famille des ouverts de X est appelée la topologie associée à d.

Distances équivalentes

Définition

Deux distances d_1 et d_2 sur X sont équivalentes s'il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que $C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y)$.

Deux distances équivalentes définissent les mêmes ouverts et donc la même topologie.

Exemples

- Sur $\mathbb{R}^2$, les normes $\|(x,y)\|_\infty = \sup(|x|,|y|)$, $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$ sont équivalentes.
- Sur $\mathcal{C}([0,1])$ les normes $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ ne sont pas équivalentes, en étudiant par exemple $f_n(x) = 2n(1-xn)\mathbf{1}_{[0,1/n]}$.

Produit d'espaces métriques

Propriété

Si (X,d) et (X',d') sont deux espaces métriques alors $D : (X\times X')\times(X\times X') \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$D\big((x,x'),(y,y')\big) = \max\big(d(x,y), d'(x',y')\big)$$

est une distance sur $X \times X'$.

Un produit fini d'espaces métriques est un espace métrique.

Définition

$V \subset X$ est un voisinage de $x \in X$ si V contient une boule ouverte $B(x,r)$.

Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

Attention ! $[a,b[$ est un voisinage de tout point $x \in]a,b[$ dans $\mathbb{R}$, mais n'est pas un voisinage de a dans $\mathbb{R}$.

Intérieur - adhérence

Définition

Soit $A \subset X$.

- L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ ou $\mathrm{int}(A)$ est le plus grand ouvert de X contenu dans A.
- L'adhérence $\bar{A}$ est le plus petit fermé de X qui contient A.

On a $$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad A \cap B(x,r) \neq \emptyset.$$

Exemples

- L'adhérence de $B(x,r)$ est la boule fermée $\bar{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$.
- L'adhérence de $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ dans $\mathbb{R}$ est $E \cup \{0\}$.
- L'intérieur de $\{0\} \cup]1,2]$ est $]1,2[$.
- L'intérieur de $\mathbb{Q}$ est $\emptyset$.

Densité

Définition

$A \subset X$ est dense dans X si et seulement si $\bar{A} = X$.

Exemples

- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et $\{\cos(n) : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.
- **Théorème de Stone-Weierstrass**. L'ensemble des restrictions à $[a,b]$ des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$.

Attention ! Cet énoncé devient faux sur un intervalle non borné.

Continuité

Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques et $f : X \to X'$.

Définition

- f est continue en x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(x_0) > 0$ tel que
$$d(x_0, x) \leq \eta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) \leq \varepsilon.$$
- f est continue (sur X) si f est continue en tout point de X.

Propriété

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $f : X \to X'$ est continue sur X;
2. $\forall U$ ouvert de X', alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert;
3. $\forall F$ fermé de X' alors $f^{-1}(F)$ est un fermé.

Continuité uniforme

Définition

Une fonction $f : X \to X'$ est uniformément continue sur X si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$
$$d(x, y) \leq \eta \ \Rightarrow \ d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

$x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[a, b]$ pour $a < b$.
Attention ! Cette fonction n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Définition

Une fonction $f : X \to X'$ est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x, y \in X$, on a
$$d'(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

On dit aussi que f est k-lipschitzienne.