Amphi 2:
Suites - Compacité - Connexité

Département de Mathématiques
École polytechnique

Remise en forme mathématique 2013

Suites

Soit (X, d) un espace métrique. Soit $x \in X$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X.

Définition

- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite x si la suite de nombres réels $\big(d(x_n, x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
  On dit aussi que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
- Lorsque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, on dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (ou encore $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge).

Propriété (de séparation)

Dans un espace métrique, la limite d'une suite, quand elle existe, est unique.

Applications des suites

Propriétés

Soit $A \subset X$. On note $\bar{A}$ son adhérence.

- $\bar{A}$ est l'ensemble des limites des suites de A.
- A est fermé $\Leftrightarrow$ si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A qui converge vers $x \in X$ alors $x \in A$.
- A est dense dans X (i.e. $\bar{A} = X$) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.

Propriété

Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques et $f : X \to X'$.

- f est continue $\Leftrightarrow$ **pour toute suite** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in X$ alors $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Valeurs d'adhérence

Définition

- $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite (ou une suite extraite) de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $y_n = x_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $a \in X$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.

Exemples

- Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence, c'est sa limite.
- La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux valeurs d'adhérence 1 et -1.
- La suite $((1 + (-1)^n)n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence, c'est 0.

Compacité

Définition

X est compact si de **tout recouvrement** de X par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini, i.e.
si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X telle que $X = \cup_{i\in I} U_i$ alors il existe un ensemble **fini** $F \subset I$ tel que $X = \cup_{i\in F} U_i$.

Exemple

$[0,1]$ est compact.

En effet, soit $(U_i)_{i\in I}$ ouverts qui recouvrent $[0,1]$. On pose
$W = \{m \in [0,1] : [0,m]$ admet un recouvrement fini par des $U_i\}$.

- $W \neq \emptyset$ car $\exists i \in I$ tel que $0 \in U_i$ donc $0 \in W$.
- W est un intervalle de $[0,1]$. Il est donc de la forme $[0,c[$ ou $[0,c]$.
- $\exists i \in I$ tel que $c \in U_i$, donc $W = [0,c]$.
- Si $c < 1$, il existe $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset U_i$ car U_i est ouvert, on aboutit à la contradiction $[0, c+\varepsilon[\subset W$.

Compacité

Exemple

$]0,1[= \bigcup_{n\geq 1}]1/n, 1-1/n[$ n'a pas de sous-recouvrement fini.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

X est compact si et seulement si toute suite d'éléments de X admet une sous-suite convergente.

Propriétés

Soient (X,d) et (X',d') deux espace métriques et $f : X \to X'$ une application continue.
Si X est compact alors $f(X)$ est un compact de X' et f est uniformément continue sur X.

Propriétés des compacts

Une partie $A \subset X$ est bornée s'il existe $R > 0$ et $x_0 \in X$, tel que $A \subset \bar{B}(x_0, R)$.

Propriété

Soit $K \subset X$. Si K est compact alors K est fermé et borné.

Propriétés

- Soit X un compact et $F \subset X$. Alors F est compact si et seulement si F est fermé.
- Si $K_1, \dots K_n$ sont n parties compactes de X alors $\bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} K_i$ est compacte.
- Si (X, d) et (X', d') sont deux espace métriques compacts alors $X \times X'$ est compact.

Compacité dans $\mathbb{R}^N$

On considère sur $\mathbb{R}^N$ la norme $\|(x_1, \dots, x_N)\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |x_i|$.

Théorème

Soit $K \subset \mathbb{R}^N$. K est compact $\Leftrightarrow$ K est fermé et borné.

En effet, soit K une partie fermée et bornée.

- Il existe $a > 0$ tel que $K \subset [-a, a]^N$ (K bornée).
- $[-a, a]^N$ est compact (produit fini de $[-a, a]$ qui est compact).
- K est fermé dans $[-a, a]^N$ qui est compact donc K est compact.

Théorème

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Alors, f est bornée et atteint ses bornes, i.e. il existe $x_0, y_0 \in X$ tels que

$$\sup_{x \in X} f(x) = f(x_0) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in X} f(x) = f(y_0).$$

Équivalence des normes en dimension finie

Théorème

Toutes les normes de $\mathbb{R}^N$ sont équivalentes.

Soit $(e_1, \ldots, e_N)$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$. Soit $\mathcal{N}$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. On a

$$\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(\sum_{i=1}^{N} x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i| \mathcal{N}(e_i) \leq \Big(\sum_{i=1}^{N} \mathcal{N}(e_i)\Big) \|x\|_\infty .$$

- En particulier $\mathcal{N} : (\mathbb{R}^N, \| \, \|_\infty) \to (\mathbb{R}, | \, |)$ est continue.
- La sphère $S = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_\infty = 1\}$ est compacte.
- Il existe donc $x_0 \in S$ tel que $\mathcal{N}(x_0) = \inf_{x \in S} \mathcal{N}(x) > 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\mathcal{N}(x) \geq \mathcal{N}(x_0) \|x\|_\infty$.

Résumé des propriétés en dimension finie

Propriétés

Si E **est un espace vectoriel de dimension finie** alors

- Toutes les normes de E sont équivalentes.
- Les notions d'ouverts, de continuité, de limite, de compacité ne dépendent pas du choix de la norme.
- Une partie $K \subset E$ est compacte si et seulement si K est fermée et bornée.

Attention! Tout ceci est **faux en dimension infinie**, où toutes les propriétés topologiques dépendent du choix de la norme.

Connexité

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition

On dit que X est connexe si X satisfait l'une des trois propositions équivalentes suivantes :

1. X ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vides.
2. X ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe de deux fermés non vides.
3. Si $f : X \to \{0, 1\}$ est continue alors f est constante.

Exemples

$X = [0, 1]$ est connexe et $Y = [0, 1/2[\cup]1/2, 1[$ n'est pas connexe.

Propriétés des connexes

Propriétés

- Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors A est connexe si et seulement si A est un intervalle.
- L'image d'un connexe par une application continue est connexe.
- L'adhérence d'un connexe est connexe.
- L'union de deux connexes d'intersection non vide est connexe.
- Si F est un ensemble discret, A est connexe et $f : A \to F$ est continue alors f est constante.

Connexité par arcs

Définition

Une partie A de X est dite connexe par arcs si deux points a et b de A peuvent être joints par un chemin continu contenu dans A, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma : [0,1] \to A$ continu tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Tout ensemble connexe par arcs est connexe.
Attention ! La réciproque est fausse en général.

Propriété

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit $U \subset E$ **ouvert**. Alors U est connexe si et seulement si U est connexe par arcs.