Amphi 4:
Espaces préhilbertiens

Département de Mathématiques
École polytechnique

Remise en forme mathématique 2013

Forme sesquilinéaire et produit hermitien

Une application $L : E \to F$ définie entre deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels est dite anti-linéaire si

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y \in E \quad L(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} L(x) + \overline{\mu} L(y).$$

Définition

- Une application $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire si $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire et si $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est anti-linéaire.
- Une forme sesquilinéaire $\langle x, y\rangle$ est une forme hermitienne si $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pour tous $x, y \in E$. En particulier $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$.
- Une forme hermitienne est définie positive si $\langle x, x\rangle > 0$ pour $x \neq 0$.
  Une telle forme est appelée un produit hermitien (ou parfois produit scalaire hermitien).

Forme sesquilinéaire et produit hermitien

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, les formes hermitiennes sont les formes bilinéaires symétriques et les produits hermitiens sont les produits scalaires.

Exemples

- Sur $\mathbb{C}^n$, on a le produit hermitien

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j.$$

  Tout produit hermitien sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de **dimension finie** se ramène à cette forme dans une base adaptée.
- Sur $\mathcal{C}([0,1])$, on a le produit hermitien

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Proposition

Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit hermitien sur E. Alors pour tout x, y dans E

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle},$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Pour $x, y \neq 0$ et $t > 0$

$$\langle x - ty, x - ty\rangle = \langle x, x\rangle - 2t\,\Re\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle.$$

C'est un polynôme en t positif ou nul, donc

$$|\Re\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

On remplace x par $xe^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et on utilise $|z| = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |\Re(ze^{i\theta})|$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Espace préhilbertien

Définition

On définit la norme sur E associée au produit hermitien $\langle\ ,\ \rangle$ par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

L'inégalité triangulaire se déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\|x+y\| = (\|x\|^2 + 2\Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2)^{1/2} \leq \|x\| + \|y\|.$$

Définition

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit hermitien $\langle\ ,\ \rangle$. C'est un espace métrique pour la distance $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$.

Lorsque E est de dimension finie, on dit que E est hermitien.
Lorsque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire, on dit que E est euclidien.

Propriétés du produit hermitien

Soient $x, y \in E$.

Propriétés

- Théorème de Pythagore :

$$\Re\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

- Egalité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

- Formule de polarisation :

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} + i\frac{\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2}{4}.$$

Orthogonalité - perpendicularité

Définition

- On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$.
- On dit que x et y sont perpendiculaires si $\Re\langle x, y\rangle = 0$.

Attention !

- Dans un $\mathbb{C}$-espace préhilbertien, l'égalité $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ n'entraine pas que x et y sont orthogonaux mais seulement perpendiculaires.
- Si $x \neq 0$ alors x et ix sont perpendiculaires et non orthogonaux.
- Ces deux notions sont équivalentes pour les espaces préhilbertien réels.

Espaces de Hilbert

Définition

Soit H un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit hermitien $\langle\ ,\ \rangle$.
H est un espace de Hilbert si H muni de la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).

Exemples

- Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.
- Si H est un espace de Hilbert et si F est un sous-espace vectoriel **fermé** de H alors F est un espace de Hilbert.

Attention ! Si H est de dimension infinie, il existe des sous-espaces vectoriels non fermés.

Exemple d'espace de Hilbert de dimension infinie

Proposition

Soit $\ell_2(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_n |x_n|^2 < +\infty\}$ l'espace des suites de carré sommable. Alors $\langle (x_n)_n, (y_n)_n \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$ est un produit hermitien sur $\ell_2(\mathbb{N})$, et $\ell_2(\mathbb{N})$ muni de ce produit hermitien est un espace de Hilbert.

- Considérons $(\mathbf{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\ell_2(\mathbb{N})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathbf{x}^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Alors $\forall \varepsilon > 0\ \exists r_0 > 0, \forall p, q \geq r_0, \sum_{n\geq 0} |x_n^p - x_n^q|^2 < \varepsilon$.
- Pour n fixé, la suite $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. On note x_n sa limite et $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Pour tout $m \geq 0$ et $p, q \geq r_0$, $\sum_{0\leq n\leq m} |x_n^p - x_n^q|^2 < \varepsilon$.
- La limite $q \to +\infty$ donne $\sum_{0\leq n\leq m} |x_n^p - x_n|^2 \leq \varepsilon$ (car somme finie).
- Vrai pour tout $m \geq 0$ donc $\sum_{n\geq 0} |x_n^p - x_n|^2 \leq \varepsilon$, i.e. $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}\| \to 0$.
- $\sum_{n\geq 0} |x_n|^2 \leq \sum_{n\geq 0} |x_n^{r_0} - x_n|^2 + \sum_{n\geq 0} |x_n^{r_0}|^2 < +\infty$, i.e. $\mathbf{x} \in \ell_2(\mathbb{N})$.

Orthogonal d'un sous-espace

Soit E un espace préhilbertien muni du produit hermitien $\langle\ ,\ \rangle$.

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'orthogonal de F est le sous-espace vectoriel

$$F^\perp = \{u \in E;\ \text{pour tout } x \in F \text{ on a } \langle u, x \rangle = 0\}.$$

Propriétés

Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors

- $F^\perp$ est un sous-espace fermé.
- Si G est un sous-espace vectoriel de F alors $F^\perp \subset G^\perp$.
- $F^\perp = (\overline{F})^\perp$.

Famille orthogonale et orthonormale

Définition

Soit E un espace préhilbertien.

- Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthogonale si pour tous $i \neq j$, on a $\langle e_i, e_j\rangle = 0$.
- Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthonormée ou orthonormale si elle est orthogonale et $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

Propriété

Soit F un sous-espace vectoriel de E de base $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Alors F admet une base orthonormée $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\langle e_i, v_i\rangle > 0$.

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt, par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$, on pose $e_0 = v_0/\|v_0\|$.
- On suppose $e_0, \ldots, e_n$ construits et on pose $g_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \langle v_{n+1}, e_k\rangle e_k$ et $e_{n+1} = g_{n+1}/\|g_{n+1}\|$.

Projection orthogonale

Théorème

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

- Pour tout $x \in E$, il existe $p_F(x) \in F$ unique tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$.
- Pour tout $x \in E$, $\|x - p_F(x)\| = \inf_{z\in F} \|x - z\|$.
- $p_F : E \to F$ est linéaire.
- Pour tous $x, y \in E$, on a $\|p_F(x) - p_F(y)\| \leq \|x - y\|$.

En particulier, $E = F \oplus F^\perp$.

- **Unicité.** Si y_1 et y_2 sont dans F tels que $x - y_1$ et $x - y_2$ sont dans $F^\perp$ alors $y_1 - y_2 \in F^\perp \cap F = \{0\}$.
- **Existence.** Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée de F. On pose

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$