Amphi 3: Espaces complets - Applications linéaires continues

Département de Mathématiques
École polytechnique

Remise en forme mathématique 2013

Suite de Cauchy

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition

Une suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que } \forall p, q \geq n_0 \text{ alors } d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Propriétés

- Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Toute suite de Cauchy possède au plus une valeur d'adhérence.
- Toute suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence est convergente.

Espace complet

Définition

Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de X est convergente dans X.

Exemples

- $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{C}^N$ sont complets.
- $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet : la suite $(1+1/n)^n$ converge vers $e \notin \mathbb{Q}$.
- $\mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ n'est pas complet, en étudiant par exemple, pour $n \geq 3$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Espace complet

Théorème

Soit (X, d) un espace métrique. Alors $\mathcal{C}(X)$ muni de $d_\infty(f,g) = \min(1, \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|)$ est complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{C}(X)$. Soit $\epsilon \in]0,1[$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq n_0 \ \ \forall x \in X$ on a $|f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon/2$.

- **Existence de la limite f.**
  - $\forall x \in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc $f_n(x) \to f(x)$.

  $\forall x \in X \quad \exists n_1(x) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall q > n_1(x)$ l'on ait $|f_q(x) - f(x)| < \epsilon/2$.
  - $d_\infty(f, f_n) \to 0$ car pour $n > n_0$ et $\forall x \in X \quad \forall q > \max(n_0, n_1(x))$,

  $$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_q(x)| + |f_q(x) - f(x)| < \epsilon.$$
- **Continuité de f.**

  Soit $x_0 \in X$. $\exists \eta > 0$ tel que $d(x, x_0) < \eta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$.

  $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|$

  Si $d(x, x_0) < \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$.

Propriétés

Propriétés

Soit (X, d) un espace métrique.

- Si X est compact alors X est complet.
- Si X est complet et $Y \subset X$, alors Y est complet si et seulement si Y est fermé.
- Si (X, d) et (X', d') sont deux espaces métriques complets alors $X \times X'$ est complet.
- Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé de **dimension finie** alors E est complet.

Attention ! Un espace vectoriel de dimension infinie peut être complet pour une norme et non complet pour une autre norme.

Espace de Banach

Définition

Un espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach.

Exemple

$\mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

est un espace de Banach.
Lorsque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour $\|\cdot\|_\infty$, on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \text{tel que } \forall n \geq n_0 \;\; \forall x \in [0,1] \;\; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Propriété caractéristique

Théorème

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente, i.e. si $\sum \|x_n\|$ est convergente alors $\sum x_n$ est convergente.

- $\Rightarrow$: Si $\sum \|x_n\|$ converge alors $\|\sum_{n=p}^{p+k} x_n\| \leq \sum_{n=p}^{p+k} \|x_n\|$ donne $\sum_{n=1}^{p} x_n$ est de Cauchy donc converge.
- $\Leftarrow$: Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1/2^n$, il existe $\varphi(n) \in \mathbb{N}$, tel que $p, q \geq \varphi(n) \Rightarrow \|x_p - x_q\| < 1/2^n$.
  On en déduit que $\sum_n \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\|$ converge, et donc $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
  Enfin la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car c'est une suite de Cauchy avec une valeur d'adhérence.

Applications

Théorème du point fixe

Soit (X, d) un espace métrique **complet** et $f : X \to X$ contractante, i.e. il existe $k < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ pour $x, y \in X$. Alors f admet un unique point fixe, c'est-à-dire, il existe un unique $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = x_0$.

- **Existence**. Soit $u_0 \in X$. On pose $u_{n+1} = f(u_n)$, et on observe $d(u_n, u_{n+1}) = d(f(u_{n-1}), f(u_n)) \leq kd(u_{n-1}, u_n) \leq k^n d(u_0, u_1)$.
  Pour $q \geq p \geq 0$ alors $d(u_p, u_q) \leq d(u_0, u_1) \sum_{j=p}^{q-1} k^j \leq k^p \dfrac{d(u_0, u_1)}{1-k}$,
  et donc si $k < 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
  Puisque E est complet, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point x_0.
  Mais f est continue, d'où $u_n = f(u_{n-1}) \to f(x_0)$ et donc $x_0 = f(x_0)$.
- **Unicité**. Si a et b sont deux points fixes distincts, alors

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b) < d(a, b).$$

Applications linéaires continues

Proposition

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $L : E \to F$ une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L est continue sur E;
2. L est continue en 0;
3. $\exists C > 0, \ \forall x \in E \quad \|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E$.

- (1) $\Rightarrow$ (2): immédiat.
- (2) $\Rightarrow$ (3): Si L est continue en 0, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|L(x)\|_F \leq 1$. Si $x \neq 0$ alors
$$\|L(x)\|_F = \frac{\|x\|_E}{\delta}\|L(\frac{\delta}{\|x\|_E}x)\|_F \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_E.$$
- (3) $\Rightarrow$ (1): $\|L(x) - L(y)\|_F = \|L(x-y)\|_F \leq C\|x-y\|_E$ car L est linéaire.

Applications linéaires continues

Propriété

Si E est de dimension finie alors toute application linéaire de E dans F est continue (et ceci ne dépend pas des choix des normes sur E et F).

Exemples

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\| \sum_{i=0}^n a_i X^i \| = \sum_{i=0}^n |a_i|$.

- Soit $R \in E$. Alors $L : P \mapsto R \cdot P$ est continue car
$$\|L(P)\| \leq \|R\|\|P\|.$$
- $L : P(X) \mapsto P(X+1)$ n'est pas continue car
$$\|X^n\| = 1 \text{ et } \|L(X^n)\| = 2^n.$$

Applications linéaires continues

Définition

On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. On définit une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ par

$$\|L\| = \sup_{x\in E-\{0\}} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Si $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ alors

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|u(x)\|_F.$$

Propriété

Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach alors $(\mathcal{L}_c(E,F), \|\cdot\|)$ est aussi un espace de Banach.