Ecole Polytechnique
Formation préparatoire

feuille n°4 - Topologie .

I. Espaces métriques.

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $A \subset X$. On rappelle que l'adhérence $\overline{A}$ de A est le plus petit fermé contenant A.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $a \in \overline{A}$
(ii) pour tout $\epsilon > 0$ alors $B(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$
(iii) il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers a.

Exercice 2. (i) Montrer que dans un compact une suite ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.

(ii) Donner un exemple de suite dans $\mathbb{R}$ ayant une unique valeur d'adhérence mais qui ne converge pas.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. Pour F et G deux parties de X et $x \in X$, on pose $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$ et $d(F, G) = \inf_{y \in G} d(F, y)$.

(i) Montrer que $x \to d(x, F)$ est 1-Lipshitzienne.
(ii) Montrer que $d(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in \bar{F}$.
(iii) En déduire que si F_1 et F_2 sont deux fermés disjoints, il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 vérifiant $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$.
(iv) Soit F_1 un fermé et F_2 un compact tels que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Montrer que $d(F_1, F_2) \neq 0$.
(v) Donner des exemples dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ de deux fermés disjoints dont la distance est nulle.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique et K une partie compacte de X. On considère une application f de K dans K contractante, c'est-à-dire si $x \neq y$ alors $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$.

(i) Montrer que la fonction $g(x) = d\big(x, f(x)\big)$ atteint son minimum en un point x_0.
(ii) Montrer que $g(x_0) = 0$.
(iii) Montrer que f a un unique point fixe.

II. Espaces vectoriels normés.

Exercice 5. Pour $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit les normes suivantes

$$N_1(u) = \mid x \mid + \mid y \mid \quad N_2(u) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad N_\infty(u) = \sup(\mid x \mid, \mid y \mid)$$

Comparer $N_1(u)$, $N_2(u)$ et $N_\infty(u)$.

Pour chacune de ces normes, dessiner la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 6. On considère l'espace des matrices $M_n(\mathbb{R})$ à n lignes et n colonnes sur $\mathbb{R}$. Pour $A = (a_{i,j})_{i,j}$. On définit la norme N sur $M_n(\mathbb{R})$ par $N(A) = \sup_{i,j} \mid a_{i,j} \mid$.

Comparer $N(AB)$ avec $N(A)N(B)$. En déduire une norme N' vérifiant $N'(AB) \leq N'(A)N'(B)$.

Exercice 7. On considère $M_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme $\| \ \|$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $GL(n, \mathbb{C})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que, pour A et B dans $M_n(\mathbb{C})$, les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique.
3. Montrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
4. Montrer le théorème de Cayley-Hamilton : pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique C_A alors $C_A(A) = 0$.

III. Applications linéaires continues.

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'une norme $\| \ \|$. Soit $f \in E^*$ une forme linéaire non nulle.
1) Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\ker(f) \oplus \mathbb{R}a = E$.
2) Montrer que si f est continue alors $\ker(f)$ est fermé.
3) On suppose que $\ker(f)$ est fermé.
   a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \cap f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.
   b) Montrer que, pour tout $x \in B(0, r)$, on a $|f(x)| < 1$
   c) En déduire que f est continue.
4) On suppose que f est continue. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $|f(x)| = \|f\| \cdot d(x, \ker(f))$.
5) Montrer que si f n'est pas continue alors $\ker(f)$ est dense dans E.

Exercice 9. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ tel que $\|u\| \leq 1$.

1. Montrer que $\ker(u - \mathrm{id}) = \ker(u - \mathrm{id})^2$.
2. Montrer que $E = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$.
3. Montrer que la suite $\dfrac{1}{n}(1 + u + \ldots + u^{n-1})$ converge vers un projecteur sur $\ker(u - \mathrm{id})$.

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\| \sum_i a_i X^i \| = \sum_i |a_i|$.
   1) L'application $\phi : P(X) \mapsto P(X + 1)$ est-elle continue ?
   2) Soit $A \in E$. L'application $\Psi_A : P \mapsto AP$ est-elle continue ?
   3) Reprendre les questions précédentes avec la norme $\|P\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{e^{-|t|} |P(t)|\}$.

IV. Espaces de fonctions - Complétude - Densité.

Exercice 11. Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} \mid f(x) \mid$ et $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} \mid f(t) \mid dt$.
   1) Vérifier que $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ sont des normes pour E.
   2) Montrer que, pour $f \in E$, on a $\|f\|_1 \leq 2\|f\|_\infty$.
   3) Construire une suite de fonctions $(f_n)_n$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty$ et la suite $\big(\|f_n\|_1\big)_n$ est bornée. En déduire que les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 12. Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} \mid f(x) \mid$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mid f(t) \mid dt$.

1) $(E, \| \|_\infty)$ est-il complet ?

2) $(E, \| \|_1)$ est-il complet ?

3) Soit $F = \mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$ le sous-espace de E formé des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. En utilisant la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, montrer que F n'est pas complet pour $\| \|_\infty$. Donner une norme simple N sur F pour laquelle F est complet.

Exercice 13. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 e^{-nx} f(x)dx = f(0).$$

En utilisant un argument de densité, montrer le même résultat en supposant seulement $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 14. *Théorème du point fixe*

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\| \ \|$. On suppose que E est complet. Soit k un réel strictement positif. On rappelle qu'une fonction $f : E \to E$ est k-Lipschitzienne si pour tout x, y dans E, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

On suppose que f est k-Lipschitzienne avec $k < 1$.

Soit $x_0 \in E$, et $(x_n)_n$ la suite définie par récurrence en posant $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge. En déduire que f admet un unique point fixe dans E.

Exercice 15. *Théorème de Riesz*

Soit E un espace vectoriel normé. Soit $\overline{B} = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de E.

On suppose que $\overline{B}$ est compacte.

1) Montrer qu'il existe une famille finie de vecteurs $x_1, x_2, \ldots x_k$ telle que $\overline{B} \subset \bigcup_{1\leq j\leq k} B(x_j, 1/2)$.

Soit F l'espace vectoriel engendré par $x_1, x_2, \ldots x_k$.

2) On fixe un point arbitraire $x \in \overline{B}$. Construire par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, une suite (y_n) de F telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\|x - y_n\| \leq 2^{-n}$.

3) En déduire que E est de dimension finie.

V. Espaces préhilbertiens.

Exercice 16. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \|_2$ définie par $\|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(nx)$.

1) Calculer $\|f_n - f_p\|_2$ pour $n, p \in \mathbb{N}$.

2) En déduire que la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

Exercice 17. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour f et g dans E, on pose $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

1) Vérifier que $(\ , \ )$ est produit scalaire sur E. On note $\| \ \|$ la norme associée.

2) Soit F l'espace des fonctions polynomiales sur $[0,1]$.

a) Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_n$ de F qui converge vers la fonction $g(x) = e^x$ dans E.

b) En déduire que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

VI. Connexité.

Exercice 18. Montrer les propriétés suivantes :
(1) l'union de deux connexes d'intersection non vide est connexe.
(2) les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (ouverts ou fermés ou semi-ouverts avec bornes finies ou infinies).
(3) L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Exercice 19. (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$.

Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$.

Exercice 20. a) Soit $n \geq 2$. Soit U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $x \in U$. Montrer que $U \setminus \{x\}$ est connexe.

b) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.