Ecole Polytechnique
Formation préparatoire

Corrigé 4- Topologie

Exercice 1. Si $B \subset X$, on note $X - B$ le complémentaire de B dans X.
1) Soit U un ouvert. On a alors $U \cap A = \emptyset \iff A \subset X - U \iff \overline{A} \subset X - U$ puisque $X - U$ est un fermé contenant A. On obtient donc

$$U \cap A = \emptyset \iff U \cap \overline{A} = \emptyset$$

ce qui est équivalent à

$$U \cap A \neq \emptyset \iff U \cap \overline{A} \neq \emptyset.$$

a) Montrons tout d'abord $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $a \in \overline{A}$ alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a $B(a,\epsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ et donc $B(a,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ par la remarque précédente, ce qui donne (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Si $a \notin \overline{A}$ alors $a \in X - \overline{A}$ qui est ouvert. Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(a,\epsilon) \subset X - \overline{A}$ c'est-à-dire $B(a,\epsilon) \cap \overline{A} = \emptyset$. Ceci donne donc $(ii) \Rightarrow (i)$.

b) Montrons maintenant $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Pour $\epsilon = \frac{1}{n}$, il existe $a_n \in A \cap B(a, \frac{1}{n})$ et donc $d(a, a_n) \leq \frac{1}{n}$. La suite $(a_n)_n$ converge alors vers a ce qui donne (iii)

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Si $a \in E$ est la limite d'une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ l'on ait $a_n \in B(a,\epsilon)$ et donc $A \cap B(a,\epsilon) \neq \emptyset$.

Remarque. On peut également démontrer $(iii) \Rightarrow (i)$ est utilisant la propriété suivante :

Soit $(x_n)_n$ une suite de E qui converge vers x. Soit $\Omega = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. On a alors

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \{x\}.$$

Preuve : (a) Supposons tout d'abord que $x \in \Omega$ et montrons que dans ce cas Ω est fermé. Soit $y \in X - \Omega$. Soit $\epsilon = d(x,y)/2$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $x_n \in B(x,\epsilon)$. En prenant $\epsilon_0 = \min\Big(\min_{1 \leq n \leq n_0}(d(y,x_n)/2), \epsilon\Big) > 0$ (ϵ_0 est le minimum d'un ensemble fini de nombre réels strictement positifs, donc il est strictement positif), on obtient $B(y,\epsilon_0) \subset X - \Omega$. Ainsi $X - \Omega$ est ouvert et par conséquent Ω est fermé. On a donc $\Omega = \overline{\Omega}$.

Supposons que $x \notin \Omega$. Dans ce cas Ω n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas ouvert ($x \in X - \Omega$ et tout boule ouverte de centre x rencontre Ω). Le même raisonnement qu'en (a) montre que $\Omega \cup \{x\}$ est fermé et c'est donc le plus petit fermé contenant Ω.

Exercice 2. Les hypothèses sont : Xest compact et $(x_n)_n$ est une suite de X avec une unique valeur d'adhérence x_0. Il faut montrer que $(x_n)_n$ converge. La seule valeur possible pour la limite est alors x_0.
On veut donc montrer : Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$ alors $x_n \in B(x0,\epsilon)$. Il suffit de montrer qu'il existe un nombre fini de n tel que $x_n \in X - B(x_0,\epsilon)$. En effet, si ceci est vrai, on note $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}, x_n \in X - B(x_0,\epsilon)\} + 1$ (qui est un nombre fini puisque $\{n \in \mathbb{N}, x_n \in X - B(x_0,\epsilon)\}$ est fini). Alors, pour $n \geq n_0$ on aura $x_n \in X - B(x_0,\epsilon)$ et donc $x_n \in B(x_0,\epsilon)$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe une infinité de n tels que $x_n \in X - B(x_0,\epsilon)$. On obtient une sous-suite $y_n = x_{\varphi(n,)}$ de x_n dont tous les éléments sont dans $X - B(x_0,\epsilon)$.

Comme $B(x_0, \epsilon)$ est ouvert, on a $X - B(x_0, \epsilon)$ est un fermé de X qui compact. On obtient donc que $X - B(x_0, \epsilon)$ est compact. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite y_n admet une valeur d'adhérence $y_0 \in X - B(x_0, \epsilon)$. Mais y_0 est également une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$. Comme $y_0 \in X - B(x_0, \epsilon)$, on a $x_0 \neq y_0$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. On a donc bien montré qu'il existe un nombre fini de n tel que $x_n \in X - B(x_0, \epsilon)$

Exercice 3. (i) Si $x_1, x_2 \in X$ alors, on a $d(x_1, F) \leq d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y)$ pour tout $y \in F$ (inégalité triangulaire). En prenant la borne inférieure sur $y \in F$ dans le membre de droite, on obtient $d(x_1, F) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, F)$. En échangeant les rôles de x_1 et x_2, on a $d(x_2, F) \leq d(x_1, x_2) + d(x_1, F)$ et donc $|d(x_1, F) - d(x_2, F)| \leq d(x_1, x_2)$. Ainsi, $x \mapsto d(x, F)$ est 1-lipschitzienne.

(ii) Par définition de la borne inférieure, on a $d(x, F) = 0$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $y \in F$ tel que $0 \leq d(x, y) \leq \epsilon$, c'est-à-dire $B(x, \epsilon) \cap F \neq \emptyset$. Ceci est équivalent à $x \in \overline{F}$ par l'exercice 1.

(iii) La fonction $f(x) = d(x, F_1) - d(x, F_2)$ est continue sur X. Ainsi $U_1 = f^{-1}(]0 + \infty[)$ et $U_2 = f^{-1}(] - \infty, 0[)$ sont deux ouverts (images réciproques d'ouverts par une fonction continue), d'intersection vide tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$.

(iv) La fonction $g(x) = d(x, F_1)$ est continue et F_2 est compact, donc il existe $x_2 \in F_2$ tel que $d(x_2, F_1) = d(F_2, F_1)$. Comme $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, on a $d(x_2, F_1) \neq 0$ par la question 2.

(v) Dans $\mathbb{R}$, on peut prendre $F_1 = \mathbb{N}$ et $F_2 = \{n + 2^{-n-1}\}$. Dans $\mathbb{R}^2$, on peut prendre $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$ et $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0$

Exercice 4. (i) L'application g est une application de K dans $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Comme K est compact, pour montrer que g atteint son minimum en un point x_0, il suffit de montrer qu'elle est continue. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$g(x) \leq d(x, y) + d(y, f(y) + d(f(y), f(x))$$

et donc

$$g(x) - g(y) \leq d(x, y) + d(f(x), f(y)) \leq 2d(x, y).$$

En inversant les rôles de x et y on obtient

$$|g(x) - g(y)| \leq 2d(x, y)$$

ce qui donne la continuité.

(ii) Par l'absurde, supposons $g(x_0) \neq 0$, ce qui est équivalent à $f(x_0) \neq x_0$. Alors, par la propriété de f appliquée à $x = x_0$ et $y = f(x_0)$, on a $d(f(x_0), f^2(x_0)) < d(x_0, f(x_0))$ et donc $g(f(x_0)) < g(x_0)$ ce qui est impossible car x_0 atteint le minimum de g.

On déduit donc que $g(x_0) = 0$ ce qui est équivalent à $f(x_0) = x_0$.

(iii) L'existence d'un point fixe découle de (ii). Si x_1 et x_2 sont 2 points fixes distincts, on a $d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$ (car points fixes) et $d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2)$ (par la propriété de f). Ces 2 points sont contradictoires. Ceci donne donc l'unicité du point fixe.

Exercice 5. Pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$N_\infty(u) \leq N_2(u) \leq N_1(u) \leq 2N_\infty(u).$$

Exercice 6. On écrit $A=(a_{i,j})_{i,j}$, $B=(b_{i,j})_{i,j}$ et $AB=(c_{i,j})_{i,j}$ avec $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ ce qui donne $N(AB)\leq nN(A)N(B)$.

La norme $N'(A)=nN(A)$ satisfait l'inégalité voulue.

Exercice 7. Sur $M_n(\mathbb{C})$, toutes les normes sont équivalentes. On choisit la norme définie pour $A=(a_{i,j})$ par $\|A\|=n\sup_{i,j}|a_{i,j}|$. Cette norme vérifie $\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|$.

1) Comme l'application det est continue l'ensemble $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})=\{\det\neq 0\}$ est ouvert.

Soit $M\in M_n(\mathbb{C})$. Si $det(M)\neq 0$ alors $M\in Gl(n,\mathbb{C})$. Si $det(M)=0$ alors 0 est valeur propre de M. Soit $\lambda_1,\dots\lambda_r$ les valeurs propres non nulles de M de telle sorte que $det(M-\lambda I_n)=0\Leftrightarrow\lambda\in\{0,\lambda_1,\dots\lambda_r\}$. La suite de matrices $A_p=M+\frac{1}{p}Id$ converge vers M et pour p tel que, pour tout $j=1,\dots r$, on ait $p>\dfrac{1}{|\lambda_j|}$, les matrices A_p sont inversibles.

2) Si B est inversible alors $AB=B^{-1}(BA)B$ et le résultat est immédiat. Ensuite on procède par densité. Si $B\in M_n(\mathbb{C})$, il existe une suite $(B_p)_p$ de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ qui converge vers B. En prenant la limte dans l'égalité $det(AB_p-XI_n)=det(B_pA-XI_n)$ (possible car les applications considérées sont continues), on obtient le résultat voulu.

3) Soit $M\in M_n(\mathbb{C})$. On note $(\lambda_j)_{1\leq j\leq r}$ les valeurs distinctes de M et m_j la multiplicité de λ_j. Toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ et donc il existe $P\in Gl(n,\mathbb{C})$ tel que $PMP^{-1}=D+N$ où D est diagonale dont les éléments diagonaux sont les λ_j répétés m_j fois et

$$N=\begin{pmatrix} 0 & n_{1,2} & \dots & & & n_{1,n}\\ 0 & 0 & n_{2,3} & & \dots & n_{2,n}\\ 0 & 0 & 0 & n_{3,4} & \dots & n_{3,n}\\ & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & 0 & n_{n-1,n}\\ 0 & \dots & & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\epsilon>0$. On cherche une matrice D_ϵ ayant des valeurs propres deux à deux distinctes telle que $\|D_\epsilon-D\|<K\epsilon$ où K est une constante ne dépendant que de D. En effet, dans ce cas la matrice $M_\epsilon=P^{-1}(D_\epsilon+N)P$ sera diagonalisable puisque ses valeurs propres sont celles de D_ϵ, donc deux à deux distinctes, et on aura $\|M_\epsilon-M\|\leq\|P^{-1}\|\,\|D_\epsilon-D\|\,\|P\|$.

Maintenant, on peut choisir $\alpha\in]0,1]$ tel que les $\lambda_j+k\alpha\epsilon$ pour $j=1,\dots r$ et $0\leq k\leq m_j-1$ soient deux à deux disctints (il suffit de prendre $\alpha\epsilon<\dfrac{\inf_{i\neq j}|\lambda_i-\lambda_j|}{\sup\{|k-k'|,0\leq k\leq m_i-1,0\leq k'\leq m_j-1\}}$).

La matrice D_ϵ dont les valeurs propres sont les $\lambda_j+k\alpha\epsilon$ pour $j=1,\dots r$ et $0\leq k\leq m_j-1$ vérifie alors $\|D_\epsilon-D\|<n\epsilon$.

4)Si A est diagonalisable, notons $\lambda_1,\dots\lambda_r$ les valeurs propres de A. On a donc $C_A(X)=(-1)^n(X-\lambda_1)^{m_1}\dots(X-\lambda_r)^{m_r}$ et $\mathbb{C}^n=Ker(A-\lambda_1I_n)\oplus\dots Ker(A-\lambda_rI_n)$ avec $dimKer(A-\lambda_jI_n)=m_j$. Si $X\in Ker(A-\lambda_jI_n)$ alors $(A-\lambda_j)X=0$ et donc $C_A(A)X=0$. En prenant une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A, on obtient alors $C_A(A)=0$.

Maintenant l'application $A\to C_A(X)=det(A-XI_n)$ est continue de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}[X]$ et l'application $P\to P(A)$ est continue de $\mathbb{C}[X]$ dans $M_n(\mathbb{C})$. Si A est quelqconque, on choisit une A_p de matrices diagonalisables qui converge vers A. En pranant la limte dans l'égalité $C_{A_p}(A_p)=0$, on obtient le résultat voulu.

Exercice 8.

1) Comme $f \neq 0$, il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. On prends $a = \dfrac{x_0}{f(x_0)}$ de telle sorte que $f(a) = 1$. Si $v \in E$, on a $v - f(v)a \in \ker(f)$ ce qui donne $\ker(f) + \mathbb{R}a = E$. Comme $\ker(f) \cap \mathbb{R}a = \{0\}$, on obtient le le résultat.

2) Si f est continue alors $ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ est fermé.

3) a) On a choisi a tel que $f(a) = 1$. Ainsi, $f^{-1}(\{1\}) = a + \ker(f) = \{a + u; u \in Ker(f)\}$ est fermé, et son complémentaire est ouvert. Comme $0 \notin f^{-1}(\{1\})$, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \cap f^{-1}\{1\} = \emptyset$.

b) Soit $x \in B(0, r)$. Si $|f(x)| > 1$ alors $\dfrac{\|x\|}{|f(x)}| < r$ avec $f(\dfrac{x}{f(x)}) = 1$ ce qui est impossible par la question a). Donc, pour tout $x \in B(0, r)$, on a $f(x) < 1$.

c) Si $x \in E$ avec $x \neq 0$ alors $\dfrac{rx}{2\|x\|} \in B(0, r)$ et donc $|f(\dfrac{rx}{2\|x\|})| < 1$. Ainsi, on a $|f(x)| < 2\|x\|/r$ ce qui implique f continue.

(iv) Si $x \in Kerf$ la propriété est évidente.

On suppose que $x \notin Kerf$. Soit $y \in \ker(f)$. Alors $|f(x)| = |f(x - y)| \leq \|f\| \, \|x - y\|$, donc

$$|f(x)| \leq \|f\| \, d(x, \ker(f)).$$

Par définition de $\|f\|$, il existe une suite x_n telle que $\|x_n\| = 1$ et $|f(x_n)|$ converge vers $\|f\|$. Comme f est non nulle, on a $\|f\| \neq 0$ et donc on peut supposer que pour tout n alors $|f(x_n)| \neq 0$. La suite définie par $y_n = \dfrac{x_n f(x)}{f(x_n)}$ est telle que $\dfrac{|f(y_n)|}{\|y_n\|}$ converge vers $\|f\|$ et $f(y_n) = f(x)$. Donc $x - y_n \in Kerf$. On obtient alors

$$d(x, \ker(f)) \leq \|x - (x - y_n)\| = \|y_n\| \to |f(x)|/\|f\|.$$

Les 2 inégalités précédentes donne donc

$$|f(x)| = \|f\| \, d(x, \ker(f)).$$

(v) Si f n'est pas continue alors $ker(f)$ est non fermé. Son adhérence $\overline{ker(f)} = F$ est un sous-espace vectoriel de E et il existe $x \in F$ tel que $f(x) \neq 0$. Dans ce cas, $E = ker(f) \oplus \mathbb{R}x = F$ ce qui donne le résultat.

Exercice 9.

(i) On a toujours $\ker(u - \mathrm{id}) \subset \ker(u - \mathrm{id})^2$. L'endomorphisme u préserve $\ker(u - \mathrm{id})^2$ car u commute avec $(u-\mathrm{id})^2$. Supposons que $\ker(u-\mathrm{id})$ soit strictement inclus dans $F = \ker(u-\mathrm{id})^2$. Soit $e_1 \in F \setminus \ker(u - \mathrm{id})$. Alors $u(e_1) - e_1 = e_2 \in \ker(u - \mathrm{id})$, et la restriction de u à $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\lim\limits_{k \to +\infty} \|A^k\| = +\infty$ ce qui est contradictoire avec $\|u\| < 1$.

(ii) Soit $v \in \ker(u-\mathrm{id}) \cap \mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$. Alors $v = u(w) - w$ et $u(v) - v = 0$, donc $w \in \ker(u-\mathrm{id})^2$, et donc $w \in \ker(u - \mathrm{id})$, ce qui implique $v = 0$. On conclut en appliquant le théorème du rang $dim\ \ker(u - \mathrm{id}) + dim\ \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) = dim\ E$.

(iii) On note $u_n = \frac{1}{n}(1 + u + ...u^{n-1})$. Soit $v \in \ker(u - \mathrm{id})$, alors $u_n(v) = v$.

Soit $v \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$, On écrit $v = u(w) - w$ avec $w \in E$. On obtient $u_n(v) = \frac{1}{n}(u^n(w) - w)$. Comme $\|u\| \leq 1$, on a $\|u_n(v)\| \leq \dfrac{2}{n}\|w\|$ qui converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc u_n converge vers le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$.

Exercice 10. Les fonctions ϕ et Ψ_A sont linéaires.
1) Pour $P_n(X) = X^n$ on a $\|P\| = 1$ et $\|\phi(P)| = 2^n$ donc Φ n'est pas continue puisqu'elle n'est pas bornée sur la boule unité $\overline{B}(0,1)$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, et $A(X) = X^n$, on a $\|\Psi_A(P)\| = \|P\|$. Maintenant, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient facilement $\|\Psi_A(P)\| \leq \|A\|\|P\|$ et donc Ψ_A est continue.
3) Pour la norme $\|P\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{e^{-|t|}|P(t)|\}$, on a $\|\Phi(P)\| \leq e\|P\|$ et donc Φ est continue pour cette norme.

En prenant $A(X) = X$, on a $\|\Psi_A(P_n)\| = (n+1)e^{-n-1}$ et $\|P_n\| = ne^{-n}$. Ainsi $\dfrac{\|\Psi_A(P_n)\|}{\|P_n\|}$ n'est pas bornée. Donc Ψ_A n'est pas continue pour cette nouvelle norme.

Exercice 11. 1) se vérifie facilement.

2) On a $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(t)|dt \leq \int_{-1}^{1} \|f\|_\infty dt = 2\|f\|_\infty$.

3) Pour $n \in N$, on définit la fonction $f_n(x)$ par :

$$\begin{gathered} f_n(x) = f_n(-x) \\ f_n(x)- = -2n(xn-1)\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]} \text{ pour } x \in [0,1] \end{gathered}$$

Un simple calcul donne $\|f_n\|_\infty = 2n$ et $\|f_n\|_1 = 2$ ainsi, il n'existe pas de constante $A > 0$ telle que, pour tout $f \in E$, l'on ait $A\|f\|_\infty < \|f\|_1$. Le deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 12. 1) Montrons que l'espace E muni de $\|\ \|_\infty$ est complet.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de E pour $\|\ \|_\infty$. On veut montrer qu'elle converge dans E pour $\|\ \|_\infty$ c'est-à- dire qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

La suite $(f_n)_n$ est de Cauchy dans E pour $\|\ \|_\infty$ signifie

$$(*) \quad \forall\epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall p \geq n_0 \ \forall q \geq n_0 \ \forall x \in [-1,1] \quad \text{on a } |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon$$

En particulier, pour tout $x \in [-1,1]$, la suite de nombres réels $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, donc elle converge. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. On définit ainsi une fonction f sur $[-1,1]$;

Nous allons montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Fixons $\epsilon > 0$. On choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ comme dans $(*)$. Maintenant , par définition de $f(x)$, pour chaque $x \in [-1,1]$, il existe $n_1(x)$ tel que pour $q > n_1(x)$, l'on ait $|f_q(x) - f(x)| < \epsilon$.

En prenant $p > n_0$ et $q > max(n_0, n_1(x))$, on a

$$|f_p(x) - f(x)| \leq |f_p(x) - f_q(x)| + |f_q(x) - f(x)| \leq 2\epsilon$$

On a donc bien $\forall\epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall p > n_0 \ \forall x \in [0,1]$ on a $|f_p(x) - f(x)| < \epsilon$, ce qui donne que $(f_n)_n$ converge vers f pour $\|\ \|_\infty$.

Par définition de $\|\ \|_\infty$, ceci veut dire que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[-1,1]$. Comme chaque f_n est une fonction continue, on obtient que f est continue et donc c'est un élément de E.

Ainsi E muni de $\|\ \|_\infty$ est complet.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \leq \frac{1}{2} \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{si} \quad \frac{1}{2} < |x| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < |x| \leq 1 \end{cases}$$

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $f \in E$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$. On écrit

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - f(x)| dx.$$

Ainsi, on obtient $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - f(x)| dx = 0$ ce qui implique $f(x) = 0$ si $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = 1$ si $|x| > \dfrac{1}{2}$ ce qui impossible lorsque f est continue.

Ainsi E muni de $\| \ \|_1$ n'est pas complet.

3) Pour $x \in [-1, 1]$, la suite $f_n(x)$ converge vers $|x| = f(x)$.

Comme $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+|x|\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$. c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Comme $f \notin F$, l'espace F n'est pas complet pour $\| \ \|_\infty$.

Prenons $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy pour N alors, c'est une suite de Cauchy pour $\| \ \|_\infty$ et la suite des dérivées $(f'_n)_n$ est aussi une suite de Cauchy pour $\| \ \|_\infty$. Donc, d'après 2) la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $f \in E$ et la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $g \in E$. Mais dans ce cas, on a f est dérivable et $f' = g$. On obtient donc $f \in F$ et $N(f_n - f) = \|f_n - f\|_\infty + \|f'_n - g\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. L'espace F est donc complet pour N.

Exercice 13. 1) Par intégration par parties, on a

$$I_n(f) = -e^{-n} f(1) + f(0) + \int_0^1 e^{-nx} f'(x) dx.$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée f' est continue et donc, elle est bornée sur le compact $[0, 1]$. On obtient alors

$$\left| \int_0^1 e^{-nx} f'(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| \int_0^1 e^{-nx} dx = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

ce qui permet d'obtenir

$$\lim_{n \to +\infty} I_n(f) = f(0).$$

2) Si f est continue sur $[0, 1]$, par le théorème de Weierstrass, il existe une suite de fonctions polynomiales (qui sont donc de classe $\mathcal{C}^1$) qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ telle que l'on ait $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \leq \epsilon$.

On a alors

$$|I_n(f) - f(0)| \leq |I_n(f - g)| + |I_n(g) - g(0)| + |g(0) - f(0)|.$$

Comme $|I_n(f - g)| \leq \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)| n e^{-nx} dx \leq \epsilon \int_0^1 n e^{-nx} dx = \epsilon(1 - e^{-n}) \leq \epsilon$, on obtient

$$|I_n(f) - f(0)| \leq 2\epsilon + |I_n(g) - g(0)|.$$

Par la question 1), il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, l'on ait $|I_n(g) - g(0)| \leq \epsilon$ et donc pour $n \geq n_0$, on a $|I_n(f) - f(0)| \leq 3\epsilon$ ce qui donne

$$\lim_{n \to +\infty} n \int_0^1 e^{-nx} f(x) dx = f(0).$$

Exercice 14. Montrons que la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. On remarque que, pour $n \geq 1$, on a

$$\|x_n - x_{n+1}\| = \|f(x_{n-1}) - f(x_n)\| \leq k\|x_{n-1} - x_n\|$$

et donc par récurrence sur n, on obtient

$$\|x_n - x_{n+1}\| \leq k^n \|x_0 - x_1\|.$$

Pour $q > p$, on obtient donc

$$\|x_p - x_q\| \leq \sum_{k=p}^{q-1} \|x_k - x_{k+1}\| \leq (k^p + k^{p+1} + \ldots + k^{q-1})\|x_0 - x_1\|.$$

Comme $k < 1$, la suite de nombres réels $u_n := 1 + k + \ldots + k^n$ est convergente, donc c'est une suite de Cauchy. L'inégalité précédente permet de conclure que la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de E.

Comme E est complet, la suite $(x_n)_n$ est convergente dans E. On note x sa limite. Comme f est continue, en prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $f(x_n) = x_{n+1}$, on obtient $f(x) = x$ et donc f a un point fixe.

Montrons l'unicité de ce point fixe. Si $y \in E$ satisfait $f(y) = y$, on a $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$. Comme $k < 1$ ceci implique $x = y$ ce qui donne l'unicité du point fixe.

Exercice 15.

1. La famille $B(x, 1/2)$ pour $x \in \overline{B}$ est un recouvrement par des ouverts de $\overline{B}$. Comme $\overline{B}$ est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Donc, il existe $x_1, \ldots, x_k$ de E tels que
$$\overline{B} = \cup_{1 \leq i \leq k} B(x_i, 1/2).$$
2. Pour $n = 0$, $y_0 = 0$ convient. Supposons que $y_n \in F$ satisfait $\|x - y_n\| \leq 2^{-n}$. On a $2^n(x - y_n) \in \overline{B}$ et donc il existe $j \in \{1, \ldots k\}$ tel que $2^n(x - y_n) \in B(x_j, 1/2)$. L'élément $y_{n+1} = y_n + x_j/2^n$ vérifie $\|x - y_{n+1}\| \leq 2^{-(n+1)}$.
3. Montrons que $E = F$ ce qui donnera le résultat. Soit x un élément non nul de E. On a donc $\frac{x}{\|x\|} \in \overline{B}$. Par la question 2, il existe une suite $(y_n)_n$ de F qui converge vers $\frac{x}{\|x\|}$. Comme F est de dimension finie, il est fermé. Donc $\frac{x}{\|x\|} \in F$ et par suite $x \in F$. Comme $0 \in F$, on obtient $E = F$ et donc E est de dimension finie.

Exercice 16. Notons $I_{n,p} = \|f_n - f_p\|^2$. On a $(cos(nx) - cos(px))^2 = \frac{cos(2nx) + 1}{2} + \frac{cos(2px) + 1}{2} - cos(n+p)x - cos(n-p)x$ et donc

$$I_{n,p} = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad n \neq p, np \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = p \\ 3\pi & \text{si} \quad np = 0, (n,p) \neq (0,0) \end{cases}$$

Par l'absurde supposons $\overline{B}(0,1)$ compacte. Comme $\|f_n\|_2 = \sqrt{\pi}$, la suite $(\frac{1}{\sqrt{\pi}} f_n)_n$ est une suite de $\overline{B}(0,1)$ donc elle admet une sous-suite $(\frac{1}{\sqrt{\pi}} f_{\varphi(n)})_n$ convergente (la fonction φ est une injection strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$). Cette sous-suite est en particulier une suite de Cauchy et donc on a

$$\lim_{n,p\to+\infty} \|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(p)}\|_2 = 0$$

ce qui est impossible puisque pour $n \neq p$ et $np \neq 0$, le calcul précédent donne $\|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(p)}\|_2 = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 17. 1) est une vérification facile.

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Pour $x \in [0,1]$, on a $|e^x - f_n(x)| = |\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}| \leq |e - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$. Ainsi $\|e^x - f_n\|_\infty$ tend vers 0 pour $n \to +\infty$, et par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|e^x - f_n\|_1 = 0$, ce qui donne la convergence de $(f_n)_n$ vers e^x dans E.

b) Par l'absurde : supposons $E = F \oplus F^\perp$. On peut alors écrire $e^x = p_0(x) + g_0(x)$ avec $p_0 \in F = \mathbb{R}[x]$ et $g_0 \in F^\perp$. On a alors $\|e^x - f_n\|^2 = \|p_0 + g_0 - f_n\|^2 = \|p_0 - f_n\|^2 + \|g_0\|^2$ par Pythagore. Ceci tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ ce qui implique $\|g_0\| = 0$ et donc $g_0 = 0$ et $e^x \in F$ ce qui est impossible.

Les trois derniers exercices sont corrigés dans le paragraphe 7 du polycopié "Vocabulaire mathématique " de Pierre Colmez (disponible sur la page web

http ://www.math.polytechnique.fr/perso/harinck/DocEv/ColmezEV2.pdf) de la page 59 à la page 62.