Ecole Polytechnique
Formation préparatoire - Mathématiques

Intégration. Intégrales dépendant d'un paramètre.

On suppose connues les notions de fonctions Riemann-intégrables et d'intégrales sur un segment de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire du type $[a,b]$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$).

On considérera ici uniquement des fonctions continues par morceaux :
Soit J un segment de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : J \to \mathbb{C}$ est **continue par morceaux sur** J s'il existe une suite finie $a_0 < a_1 < \ldots < a_r$ avec $[a_0, a_r] = J$ telle que f soit continue sur $]a_j, a_{j+1}[$ pour $0 \leq j \leq r-1$ et f admet une limite à droite en chaque a_j pour $0 \leq j \leq r-1$ et une limite à gauche en a_j pour $1 \leq j \leq r$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est **continue par morceaux sur** I si pour tout segment $J \subset I$, la fonction f est continue par morceaux sur J.

On notera $\mathcal{E}(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur I.

1 Intégration sur un intervalle quelconque.

Définitions. Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Une fonction $f \in \mathcal{E}(I)$ est **intégrable** sur I s'il existe $M > 0$ tel que, pour tout segment $J \subset I$, l'on ait $\displaystyle\int_J |f| \leq M$. Dans ce cas, on pose

$$\int_I |f| = \sup_{J \subset I \text{ segment}} \int_J |f|.$$

Soit $f \in \mathcal{E}(I)$ à valeurs réelles (i.e. $f : I \to \mathbb{R}$) . Alors f est intégrable sur I si et seulement si les fonctions $f^+ = max(f,0)$ et $f^- = max(-f,0)$ sont intégrables sur I. On pose alors $\displaystyle\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.

Soit $f \in \mathcal{E}(I)$ à valeurs complexes (i-e $f : I \to \mathbb{C}$). Alors f est intégrable sur I si et seulement si la partie réelle $Re(f)$ et la partie imaginaire $Im(f)$ sont intégrables sur I. On pose alors $\displaystyle\int_I f = \int_I Re(f) + i \int_I Im(f)$.

Autres notations et terminologies.

Si $J = [a,b]$ et $f \in \mathcal{E}(J)$, on note également $\displaystyle\int_J f = \int_a^b f(t)dt$.

Soit $I = [a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$ ou $b \in \mathbb{R}$, $b > a$ et $f \in \mathcal{E}(I)$.

La fonction f est intégrable sur I si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to b,\, x<b} \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t$ existe. Dans ce cas, la limite $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b,\, x<b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_I f$.

Dans ce cas, on dit également que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **absolument convergente**.

Lorsque la limite $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b,\, x<b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe, on dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **convergente**.

Lorsque f n'est pas intégrable sur I et que la limite $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b,\, x<b}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe, on dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **semi-convergente**. Cette intégrale est appelée **intégrale impropre** ou **intégrale généralisée** de f sur I.

On a des notations analogues en prenant $I =]a,b]$ avec $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$ ou $a = -\infty$ ou encore $I =]-\infty, +\infty[$.

Exemples.
(1) $\frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

(2) $\frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

(3) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

2 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit I un intervalle (non spécialement borné) de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{E}(I)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I. On suppose que pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

Attention , même si $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, on peut avoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t \neq \int_I f(t)\mathrm{d}t$.

Pour intervertir limite et intégrale, il faut des hypothèses supplémentaires.

Théorème Soit I=[a,b]. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est Riemann intégrable sur $[a,b]$. Si la la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I
Alors l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$.

Les deux résultats suivants seront vus dans le cadre plus général de l'intégration de Lebesgues.

Théorème de convergence monotone Soit $(f_n)_n$ une **suite croissante** de fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle I (non spécialement borné) de $\mathbb{R}$ dans $[0,+\infty[$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux et intégrable sur I. Alors on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)dx$.

Théorème de convergence dominée Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle I (non spécialement borné) de $\mathbb{R}$.
Hypothèses
(a) la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.
(b) **hypothèse de domination** : Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall n \quad \forall x \in I \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

Alors on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)dx$.

Applications à l'étude de fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f:\ (x,t) \to f(x,t)$ une fonction de $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème de continuité : Sous les hypothèses suivantes :
(a) pour tout $t \in J$, la fonction $x \to f(x,t)$ est continue,
(b) pour tout $x \in I$, la fonction $t \to f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,
(c) il existe une fonction φ intégrable sur J telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$ on ait $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$,
Alors la fonction $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

Théorème de dérivation Sous les hypothèses suivantes :
(a) pour tout $t \in J$, la fonction $x \to f(x,t)$ est dérivable et $x \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue ,
(b) pour tout $x \in I$, les fonctions $t \to f(x,t)$ et $t \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur J,
(c) il existe une fonction φ intégrable sur J telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$ on ait $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t)$,
Alors la fonction $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $g'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Remarque importante La continuité et la dérivabilité d'une fonction sont des propriétés locales. Pour montrer que f est continue ou de classe $\mathcal{C}^1$ sur I il suffit de montrer que pour tout $a < b$ avec $[a,b] \subset I$, la fonction est continue ou de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Ceci est important pour vérifier l'hypothèse de domination qui, souvent, est possible sur un compact (on peut utiliser le fait qu'une fonction continue sur un compact est bornée) mais pas possible sur tout l'intervalle I considéré.