Ecole Polytechnique
Formation préparatoire

feuille 3 - Intégration.

Exercice 1. Etudier la convergence des intégrales suivantes et donner leur valeur lorsqu'elles convergent :

$$(a)\quad \int_{-\infty}^{x} \frac{t}{t^4+t^2+1}dt \qquad (b)\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{4\cos^4\ t-1}$$
$$(c)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\log\ t}{(1+t)^2}dt \qquad (d)\quad \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{2t^2-1}}$$

Exercice 2. Etudier, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes

$$(a)\int_0^{+\infty} \frac{x\log(x)}{(1+x^2)^\alpha}dx \qquad (b)\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$$

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ de la manière suivante : sur tout intervalle de la forme $\left[n-\frac{1}{n^3}, n+\frac{1}{n^3}\right]$, où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $f(x)=\frac{n}{2}$; $f(x)=0$ ailleurs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$. Enfin, on note $[x]$ la partie entière du nombre réel x.

1- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_{[x]-1} \leq 1+\int_0^x f(t)\,dt \leq S_{[x]+1}$.

2- En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 4. On définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ en posant $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x$ et $\int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 5. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{x}\mathrm{d}x$ est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\log(x)}{x}\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 6. On considère les fonctions définies par : $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

1) Montrer que f et g sont dérivables et calculer f' et g'.

2) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x)+g(x) = \frac{\pi}{4}$.

3) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Calculer les limites suivantes :

1.
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x^2}dx.$$

2.
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} x^{\frac{1}{n}} f(x)dx.$$

3.
$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x\log(x)}{(1+x^2)^\alpha}dx.$$

Exercice 8. Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\,dt.$

(2) Montrer que la fonction $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\ t}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.
2. Montrer que la fonction $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}\sin\ t}{t}\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$. En déduire une expression explicite de $F(x)$ pour $x\in]0,+\infty[$.
4. Pour $t>0$, on pose
$$G(t)=\int_t^{+\infty}\frac{\sin\ u}{u}\mathrm{d}u.$$
Montrer que G est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$
5. Montrer que F est continue en 0. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\ t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.
6. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\ t}{t}\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Exercice 10. (Fonction Γ d'Euler).

(i) Montrer que l'intégrale $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t$ est convergente pour $s>0$,

(ii) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers $+\infty$ lorsque s tend vers 0,

(iii) Montrer que $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ si $s>0$ et en déduire $\Gamma(n)$.

(iv) On suppose $s>0$. Soit $I_n=\displaystyle\int_0^n\big(1-\frac{t}{n}\big)^n t^{s-1}\mathrm{d}t.$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=\Gamma(s)$ et en déduire la formule de Gauss :
$$\Gamma(s)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\,n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

(v) Pour $x>1$, on note $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^x}$ la fonction zêta de Riemann.

Montrer que, pour tout $x>1$, on a
$$\zeta(x)\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}dt.$$

Exercice 11. (Convolution) Soient f et g deux fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f\star g(x)=\int_{\mathbb{R}}f(t)g(x-t)dt$.

1) Montrer $f\star g=g\star f$ et que $f\star g$ est continue.

2) Montrer que si g est de classe $\mathcal{C}^k$ alors $f\star g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et calculer $(f\star g)^{(p)}$ pour $p\leq k$.

3) Montrer que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $f\star g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer ses dérivées.