Ecole Polytechnique
Formation préparatoire

corrigé 3 - Intégration

Exercice 1. (a) Soit $f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{t}{t^4+t^2+1}dt$. L'application $t \mapsto t^2$ n'étant pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[0,+\infty[$, il faut distinguer deux cas :

Pour $x \leq 0$, en effectuant le changement de variables $u = t^2$, on obtient $f(x) = -\frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{du}{1+u+u^2} = -\frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{du}{\frac{3}{4}+(u+1/2)^2}$. On utilise $Arctg\left(\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}\frac{1}{1+(x/a)^2} = \frac{a}{a^2+x^2}$ et donc

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - Arctg\,\frac{2}{\sqrt{3}}(x^2+\frac{1}{2})\right)$$

Pour $x \geq 0$, on a $f(x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{t}{t^4+t^2+1}dt + \int_{-x}^{x} \frac{t}{t^4+t^2+1}dt$. Comme la fonction $t \to \frac{t}{t^4+t^2+1}$ est impaire, l'intégrale $\int_{-x}^{x} \frac{t}{t^4+t^2+1}dt$ est nulle et donc $f(x) = f(-x)$.

(b) Le seul problème à étudier est le comportement au voisinage de $t = \frac{\pi}{4}$. Soit $g(t) = \frac{1}{4cos^4t-1}$. On étudie le développement asymptotique au voisinage de $t = \frac{\pi}{4}$ de g. On a

$$g(t) = \frac{1}{(\sqrt{2}cost-1)(\sqrt{2}cost+1)(2cost^2+1)}.$$

Au voisinage de $\frac{\pi}{4}$, on a $\sqrt{2}cost+1 \sim 2$, $2cost^2+1 \sim 2$ et

$$\sqrt{2}cost - 1 = \sqrt{2}cos(t-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}) - 1 = cos(t-\frac{\pi}{4}) - sin(t-\frac{\pi}{4}) - 1 \sim -(t-\frac{\pi}{4}) \sim -(t-\frac{\pi}{4}).$$

Le comportement de $g(t)$ au voisinage de $t = \frac{\pi}{4}$ est le même que celui de $\frac{1}{-4u}$ au voisinage de 0, l'intégrale considérée est donc divergente.

(c) On étudie les limites lorsque A tend vers $+\infty$ et ϵ tend vers 0 de $\int_{\epsilon}^{A} \frac{\log(x)}{(1+x)^2}dx$. On a $\int_{\epsilon}^{A} \frac{\log(x)}{(1+x)^2}dx = \left[\frac{-\log(x)}{1+x}\right]_{\epsilon}^{A} + \int_{\epsilon}^{A} \frac{dx}{x(1+x)} = \frac{-\log(A)}{1+A} + \frac{\log(\epsilon)}{1+\epsilon} + \log\left(\frac{A}{A+1}\right) - \log\left(\frac{\epsilon}{\epsilon+1}\right) = \frac{-\log\,A}{1+A} + \log\left(\frac{A}{A+1}\right) - \frac{\epsilon\,\log\,\epsilon}{1+\epsilon} - \log(\epsilon+1)$. Cette quantité tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$ et ϵ vers 0. Donc l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \frac{\log(x)}{(1+x)^2}dx$ est convergente et vaut 0.

(d) Soit $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x^2-1}}$ et $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} f(x)dx$. Au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}x^2}$ et au voisinage de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, on a $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}x-1}}$ (même comportement que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en 0) et donc l'intégrale est convergente. En faisant le changement de variable $u = \frac{1}{\sqrt{2}x}$, on obtient $I = \int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = Arcsin\,1 - Arcsin\,0 = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.

(a) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $g_\alpha(x) = \dfrac{x\ \log x}{(1+x^2)^\alpha}$ et $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_\alpha(x)dx$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction g_α se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. L'intégrale $I_1(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ \log x}{(1+x^2)^\alpha}dx$ est donc convergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Notons $I_2(\alpha) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\ \log x}{(1+x^2)^\alpha}dx$ de telle sorte que $I(\alpha) = I_1(\alpha) + I_2(\alpha)$. En $+\infty$, la fonction g_α est positive et équivalente à la fonction $f_\alpha(x) = \dfrac{x\ \log x}{x^{2\alpha}} = \dfrac{\log x}{x^{2\alpha-1}}$.

Pour $\alpha \neq 1$, une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{\log x}{x^{2\alpha-1}}dx &= \frac{\log(A)}{2(1-\alpha)A^{2\alpha-2}} - \frac{1}{2(1-\alpha)}\int_1^A \frac{1}{x^{2\alpha-1}}dx \\ &= \frac{\log(A)}{2(1-\alpha)A^{2\alpha-2}} - \frac{1}{(2-2\alpha)^2}\Big(\frac{1}{A^{2\alpha-2}} - 1\Big).\end{aligned}$$

Si $\alpha > 1$ alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\log x}{x^\alpha}dx = \frac{1}{(2-2\alpha)^2}$ et si $\alpha < 1$ alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\log x}{x^{2\alpha-1}}dx = +\infty$.

Pour $\alpha = 1$, on a $\displaystyle\int_1^A \frac{\log x}{x}dx = \frac{1}{2}\log(A)^2$ et donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\log x}{x}dx = +\infty$.

Ainsi, $I_2(\alpha)$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

On déduit donc que $I(\alpha)$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

(b). Au voisinage de $t = 0$ on a $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim t^{\alpha-1}$ et donc l'intégrale converge en 0 si et seulement si $\alpha > 0$.

Pour $\alpha > 0$, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 t^{\alpha-1}e^{-t} = 0$ donc il existe $A > 0$ tel que pour tout $t > A$, on ait $t^{\alpha-1}e^{-t} < \dfrac{1}{t^2}$. Par suite, pour tout $B > A$, on a $0 \leq \displaystyle\int_A^B t^{\alpha-1}e^{-t}dt \leq \int_A^B \frac{1}{t^2}dt$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ est convergente, et que la fonction $B \to \int_A^B t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est strictement croissante, on en déduit que $\displaystyle\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente.

On conclut donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Exercice 3. 1) On a $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = \sum_{k=2}^{[x]-1}\int_{k-\frac{1}{k^3}}^{k+\frac{1}{k^3}} \frac{k}{2}\ dt + \int_{[x]-\frac{1}{[x]^3}}^x f(t)dt.$

La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{[x]-\frac{1}{[x]^3}}^x f(t)dt$ dépend de la position de x par rapport à $[x] + \dfrac{1}{[x]^3}$ et à $[x]+1-\dfrac{1}{([x]+1)^3}$. Cependant, on a toujours $0 \leq \displaystyle\int_{[x]-\frac{1}{[x]^3}}^x f(t)dt \leq \int_{[x]-\frac{1}{[x]^3}}^{[x]+1} f(t)dt = \frac{1}{[x]^2} + \frac{1}{2([x]+1)^2}$.

Comme $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{k^3}}^{k+\frac{1}{k^3}} \frac{k}{2}\ dt = \frac{1}{k^2}$, on obtient donc $S_{[x]-1} \leq 1 + \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt \leq S_{[x]+1}$.

2) La fonction $x \to \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ est croissante (car f est postive) et majorée (puisque $S_{[x]+1}$ l'est), donc elle admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.

Par les inégalités précédentes, on a même :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

Montrons que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

On pose $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{2}{n^3}$. Par définition de f, on a $f(x_n) = \frac{n}{2}$ et $f(y_n) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 0$. Par conséquent, la fonction f n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$ et donc a $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [n_0, n_0+1[$ et donc pour tout $n \geq n_0 + 1$ on a $f_n(x) = 0$, ce qui donne $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et donc $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0$.

Exercice 5. La fonction $\frac{\log(x)}{x}$ est la dérivée de la fonction $\frac{1}{2}\big(\log(x)\big)^2$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 ou vers $+\infty$. Ainsi, on a $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{1} \frac{\log(x)}{x}dx = -\infty$ et $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\log(x)}{x}dx = +\infty$. L'intégrale est donc divergente.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$, on obtient $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\log(x)}{x}dx = -\int_1^n \frac{\log(x)}{x}dx$ et donc $\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\log(x)}{x}dx = 0$.

Exercice 6. 1) La fonction $t \to e^{-t^2}$ est continue donc f est dérivable et

$$f'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}dt = 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-u^2x^2}du.$$

Soit $g(t,x) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$. On a alors $\frac{\partial}{\partial x}g(t,x) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \to g(t,x)$ et $t \to \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)$ sont continues et intégrables sur $[0,1]$.

Méthode 1.

(ii) Pour tout $t \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $|\frac{\partial}{\partial x}g(t,x)| = 2|x|e^{-x^2(1+t^2)} \leq 2|x|e^{-x^2}$. La fonction $x \mapsto 2|x|e^{-x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ (car continue et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$). Donc, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\frac{\partial}{\partial x}g(t,x)| \leq M$ et la fonction $t \mapsto M$ est intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi, par le théorème de dérivation, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt.$$

Méthode 2. Soit $a > 0$. Alors, pour tout $x \in [-a,a]$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a $|\frac{\partial}{\partial x}g(t,x)| \leq 2ae^{-a^2(1+t^2)}$ qui est indépendante de x et intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi, par le théorème de dérivation, pour tout $a > 0$, la fonction g est dérivable sur $[-a,a]$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt.$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la question 1) donne $f'(x)+g'(x)=0$ et donc $f+g$ est constante et $f(0)+g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = Arctg(1) = \frac{\pi}{4}$.

3) Pour $t \in]0,1]$, on a $\lim_{x\to+\infty} g(t,x) = 0$ et pour tout $x \geq 0$, $|g(t,x)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ qui est indépendante de x et intégrable sur $[0,1]$. Ainsi, le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \big(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\big)^2$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 7.

1. Soit $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ pour $x \in [0,+\infty[$. Pour $x \geq 0$, on a $\log(1+x) \leq x$, donc

$$0 \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \leq e^{-x}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$, on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1+\frac{x}{n})^n\ e^{-2x}dx$ est convergente.

On a :

a) Pour tout $x \geq 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}$,

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ et la fonction e^{-x} est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Donc par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

2. On note $\mathbf{1}_{[1,(1+\frac{1}{n})^n]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[1,(1+\frac{1}{n})^n]$. On écrit $\int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} x^{\frac{1}{n}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[1,(1+\frac{1}{n})^n]}(x)x^{\frac{1}{n}} f(x)dx$. On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $f_n(x) = \mathbf{1}_{[1,(1+\frac{1}{n})^n]}(x)x^{\frac{1}{n}} f(x)$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [1,e[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x)| \leq e\mathbf{1}_{[1,e[}(x) \sup_{t\in[1,e]} |f(t)|$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de convergence dominée donne donc : $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_0^e f(x)dx$.

3. La convergence de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} = \frac{x\ \log x}{(1+x^2)^\alpha}dx$ pour $\alpha > 1$ a été vue dans l'exercice 2.

On remarque que si $n \leq \alpha < n+1$ alors $I(n+1) \leq I(\alpha) \leq I(n)$. Pour calculer la limite $\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$, il suffit de calculer $\lim_{n\to+\infty} I(n)$.

Soit $g_n(x) = \frac{x\ \log x}{(1+x^2)^n}$. On a :

a) pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a $\lim_{n\to+\infty} |g_n(x)| = 0$,

b) pour tout $x \in [0,+\infty[$ et $n \geq 2$, on a $|g_n(x)| \leq \frac{|x\ \log x|}{(1+x^2)^2}$ et la fonction $\frac{|x\ \log x|}{(1+x^2)^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée et la remarque précédente, on obtient :

$$\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} I(n) = 0.$$

Exercice 8. (1) Pour $n=0$, on écrit $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u)du = f(0) + x\int_0^1 f'(tx)dt$. Le résultat s'obtient par récurrence en effectuant une intégration par parties de $\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\,dt$.

(2) Soit $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Comme f et $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}-\{0\}$, la fonction g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}-\{0\}$. Il suffit de montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 c'est-à-dire sur un segment $[-a,a]$ avec $a>0$. On écrit $g(x) = \int_0^1 g(t,x)dt$ avec $g(t,x) = f'(tx)$. On montre par récurrence sur k que g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[-a,a]$ en utilisant le théorème de dérivation :

(i) Pour tout $t\in[0,1]$, la fonction $g(t,\cdot) : x\to f'(tx)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x) = t^k f^{(k+1)}(tx)$.

(ii) pour tout $x\in[-a,a]$ et tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x)$ est continue et intégrable sur $[0,1]$,

(iii) Pour tout $x\in[-a,a]$ et $t\in[0,1]$, on a $|\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x)| \le t^k \sup\limits_{u\in[-a,a]} |f^{(k+1)}(u)| = h_k(t)$ et la fonction h_k est intégrable sur $[0,1]$.

Pour $k=0$, le théorème de continuité donne la continuité de g. Si l'on suppose (hypothèse de récurrence) que g est $\mathcal{C}^k$ avec $g^{(k)}(x) = \int_0^1 \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x)dt$, le théorème de dérivation pour $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x)$ dont les hypothèses sont vérifiées en (i),(ii) et (iii) appliqué à $k+1$ donne alors g est classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[-a,a]$.

Ceci est valable pour tout $a>0$ et $k\in\mathbb{N}$, on obtient donc g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

1. La fonction $t\to\dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable en 0. Pour $A>0$, une intégration par parties donne

$$\int_0^A \frac{\sin t}{t}dt = \frac{1-\cos(A)}{A} + \int_0^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt.$$

Comme $t\to\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}dt$ est convergente.

2. On pose $f(t,x) = e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$. Pour montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, il suffit de montrer que pour tout $a>0$, alors F est C^1 sur $[a,+\infty[$.

Continuité : (a) pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la fonction $x\to f(t,x)$ est continue sur $[a,+\infty[$,

(b) pour tout $x\in[a,+\infty[$ et $t\in\mathbb{R}_+$, on a $|f(t,x)| \le \left|e^{-at}\frac{\sin t}{t}\right|$ et la fonction $\left|e^{-at}\dfrac{\sin t}{t}\right|$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par le théorème de continuité, on en déduit que F est continue sur $[a,+\infty[$.

Classe C^1 :

(a) pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, la fonction $x\to f(t,x)$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et on a $\dfrac{\partial}{\partial x}f(t,x) = -e^{-xt}\sin t$.

(b) pour tout $t\in\mathbb{R}^+$ et $x\in[a,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{\partial}{\partial x}f(t,x)\right| \le e^{-at}$ et la fonction e^{-at} est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par le théorème de dérivation, on déduit que F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t dt$.

3. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{n\to+\infty} F(n)$ car si $n \le x < n+1$ alors $|f(t,n+1)| \le |f(t,x)| \le |f(t,n)|$. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(t,n) = 0$ et pour $n \ge 2$, alors $|f(t,n)| < e^{-2t}$. Comme e^{-2t} est intégrable sur $[0,+\infty[$, par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

Pour $x > 0$, calculons $F'(x)$ par intégration par parties. On a

$$-\int_0^A \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)dt = \Big[\frac{e^{-xt}\sin t}{x}\Big]_0^A - \int_0^A \frac{e^{-xt}}{x}\cos t dt$$

$$= \frac{e^{-xA}\sin\ A}{A} + \frac{1}{x}\Big[\frac{e^{-xt}}{x}\cos t\Big]_0^A + \frac{1}{x^2}\int_0^A e^{-xt}\sin t dt.$$

En prenant la limite quand A tend vers $+\infty$, on obtient

$$F'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{F'(x)}{x^2},$$

et donc $F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$. Par suite, on a $F'(x) = -\mathrm{Arctg}(x) + C$ où C est une constante. Comme $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, on déduit que $C = \frac{\pi}{2}$, et donc pour $x > 0$, on a

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}(x).$$

4. On a $G(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du - \int_0^t \frac{\sin u}{u}du$. Comme la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, on déduit que G est de classe C^1 et $G'(t) = -\dfrac{\sin t}{t}$.

5. Soit $x \neq 0$. Par la question (*4.*), on a $F(x) - F(0) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} G'(t)(e^{-xt}-1)dt$. Une intégration par parties donne donc

$$F(x) - F(0) = \Big[-G(t)(e^{-xt}-1)\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} G(t)\big(-xe^{-xt}\big)dt.$$

Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} G(t) = 0$, on obtient :

$$F(x) - F(0) = -x\int_0^{+\infty} G(t)e^{-xt}dt = -\int_0^{+\infty} G\Big(\frac{u}{x}\Big)e^{-u}du.$$

Pour calculer la limite quand x tend vers 0 de cette quantité, on utilise le théorème de continuité. On pose

$$H(x,u) = \begin{cases} G\Big(\dfrac{u}{x}\Big)e^{-u} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Pour $u \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto H(x,u)$ est continue sur $[0,+\infty[$ (puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} G(t) = 0$),

(b) Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est convergente, la fonction G est bornée sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire, il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, l'on ait $|G(x)| < C$, donc $|H(x,u)| \le Ce^{-u}$. Comme e^{-u} est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on déduit du théorème de continuité que

$$\lim_{x\to 0} F(x) - F(0) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0} H(x,u)du = 0.$$

Ainsi F est continue en 0.

Par la question (*3.*), on a $F(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}(x)$ pour $x > 0$. La continuité de F en 0 donne donc

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

6. Il s'agit de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| dt$ est divergente. Soit $N \in \mathbb{N}$. On écrit

$$\int_0^N |\frac{\sin t}{t}| dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\frac{\sin t}{t}| dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt.$$

Or, on a $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt \geq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt \geq \frac{1}{2(\frac{3\pi}{4} + k\pi)}$ et ceci est le terme général d'une série divergente.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| dt$ est divergente.

Exercice 10. (*i*) La convergence de l'intégrale a été étudiée dans l'exercice 2 (b).

(*ii*) Pour montrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, il suffit de le prouver sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$. On pose $g(s, t) = e^{-t} \cdot t^{s-1}$. Soit $s \in [\alpha; \beta] \subset]0; +\infty[$. La fonction g est de classe C^∞ par rapport à s, et continue par morceaux. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\partial^k g}{\partial s^k} = \ln(t)^k \cdot g(s, t)$$

Enfin, on a l'hypothèse de domination suivante :

$$(\forall s \in [\alpha; \beta])(\forall t \in]0; +\infty[) \left| \frac{\partial^k g}{\partial s^k} \right| \leq |\ln(t)|^k \cdot e^{-t} \cdot (t^{\alpha-1} + t^{\beta-1}) = \phi(t)$$

car pour $t \in]0, 1]$, on a $t^{s-1} \leq t^{\alpha-1}$ et pour $t > 1$, on a $t^{s-1} \leq t^{\beta-1}$. On vérifie facilement que la fonction ϕ est intégrable sur $]0; +\infty[$: le théorème de dérivation des intégrales à paramètre nous dit que la fonction Γ est de classe C^∞. De plus, ses dérivées successives sont données par :

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k \cdot e^{-t} \cdot t^{s-1} \mathrm{d}t$$

Enfin, pour s tendant vers 0, on a :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{s-1} \mathrm{d}t \geq \int_0^1 e^{-t} \cdot t^{s-1} \mathrm{d}t \geq \int_0^1 e^{-1} \cdot t^{s-1} \mathrm{d}t = \frac{e^{-1}}{s} \xrightarrow{s \to 0} +\infty$$

(*iii*) Soit $s > 0$, et on considère le segment $[a, A] \subset]0; +\infty[$. Par intégration par parties, on trouve :

$$\int_a^A e^{-t} \cdot t^s \mathrm{d}t = \left[-e^{-t} \cdot t^s \right]_a^A + s \cdot \int_a^A e^{-t} \cdot t^{s-1} \mathrm{d}t$$

En faisant tendre a et A respectivement vers 0 et $+\infty$, on déduit l'égalité cherchée :

$$\Gamma(s + 1) = s \cdot \Gamma(s)$$

En particulier, comme $\Gamma(1) = 1$, on déduit :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ \Gamma(n) = (n - 1)!$$

(*iv*) Pour $s > 0$ on pose :

$$I_n(s) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n t^{s-1} \mathrm{d}t$$

On pose : $f_n(s,t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} \cdot 1_{]0;n]}$ (où 1_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A).

Pour n tendant vers $+\infty$, la suite de fonction $f_n(s,t)$ converge simplement vers la fonction $g(s,t)$. De plus, l'inégalité classique $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$ valable pour $t \in [0;n]$ implique qu'on a l'hypothèse de domination suivante :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ \ |f_n(s,t)| \leq g(s,t)$$

Comme $g(s,t)$ est intégrable, on en déduit par le théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n(s) = \Gamma(s)$$

Pour simplifier les calculs, posons :

$$B_n(s) = \frac{I_n(s)}{n^s} = \int_0^1 (1-t)^n \cdot t^{s-1} \mathrm{d}t$$

En faisant une intégration par parties, on trouve :

$$B_n(s) = \frac{n}{s} \cdot B_{n-1}(s+1)$$

En itérant ce processus, et en constatant que $B_0(s) = \frac{1}{s}$, on déduit la formule :

$$B_n(s) = \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

Et finalement :

$$I_n = \frac{n! \cdot n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

Et on retrouve donc la formule de Gauss :

$$\Gamma(s) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! \cdot n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

(v) Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$. On peut réécrire la fonction Γ en faisant le changement de variable $u = nt$:

$$\Gamma(s) = n^s \cdot \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1} \mathrm{d}t$$

On déduit les égalités :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t \cdot (1 - e^{-t})} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{t^{s-1}}{e^t} e^{-nt} \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 1} t^{s-1} e^{-nt} \mathrm{d}t$$

On veux intervertir la somme et l'intégrale. Soit $f_N(t) = \sum_{n=1}^{N} t^{s-1} e^{-nt} = t^{s-1} e^{-t} \frac{1 - e^{-Nt}}{1 - e^{-t}}$. On a $\lim_{N \to +\infty} f_N(t) = t^{s-1} \sum_{n \geq 1} e^{-nt}$ et $|f_N(t)| \leq \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} = h(t)$. La fonction $h(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car équivalente à t^{s-2} en $t = 0$ avec $s - 2 > -1$, et équivalente en $+\infty$ à $t^{s-1} e^{-t}$ avec $s > 1$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \cdot e^{-nt} \mathrm{d}t = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \cdot \Gamma(s) = \zeta(s) \cdot \Gamma(s).$$

D'où le résultat cherché.