

Ecole Polytechnique  
Formation préparatoire - Mathématiques

Espaces euclidiens et hermitiens.

**Définitions.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $K = \mathbb{R}$ . Soit  $\beta : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ .

1) On dit que  $\beta$  est une **forme bilinéaire** si, pour tout  $x \in E$  alors  $x \rightarrow \beta(x, y)$  et  $y \rightarrow \beta(y, x)$  sont linéaires.

2)  $\beta$  est dite **symétrique** si, pour tout  $(u, v) \in E^2$ , on a  $\beta(u, v) = \beta(v, u)$ .

3) Soit  $\beta$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ . On dit que c'est un **produit scalaire** si  $\beta$  est **définie positive**, c'est-à-dire pour tout  $u \in E$ , on a  $\beta(u, u) \geq 0$  et  $\beta(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

Un espace vectoriel de **dimension finie** sur  $\mathbb{R}$  muni d'un produit scalaire est appelé **espace euclidien**.

**Définitions.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $\beta : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ .

1) On dit que  $\beta$  est une **forme sesquilinéaire** si pour tout  $x \in E$  alors  $x \rightarrow \beta(x, y)$  est linéaire et si  $y \rightarrow \beta(x, y)$  est **anti-linéaire**, c'est-à-dire pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a  $\beta(x, \lambda y) = \overline{\lambda} \beta(x, y)$ .

2)  $\beta$  est dite **hermitienne** si, pour tout  $(u, v) \in E^2$ , on a  $\beta(u, v) = \overline{\beta(v, u)}$ .

3) Soit  $\beta$  une forme hermitienne sur  $E$ . On dit que c'est un **produit hermitien (ou produit scalaire hermitien)** si  $\beta$  est **définie positive**, c'est-à-dire pour tout  $u \in E$ , on a  $\beta(u, u) \geq 0$  et  $\beta(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

Un espace vectoriel de **dimension finie** sur  $\mathbb{C}$  muni d'un produit scalaire hermitien est appelé **espace hermitien**.

Un espace vectoriel sur  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien** lorsqu'il est de **dimension infinie**.

Dans toute la suite,  $E$  est un espace vectoriel de **dimension finie**  $n$  sur  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  muni d'un produit scalaire (hermitien) noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Deux vecteurs  $u$  et  $v$  sont dit **orthogonaux** si  $\langle u, v \rangle = 0$ .

Une famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de vecteurs de  $E$  est dite **orthogonale** si  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ .

Elle est dite **orthonormée** ou **orthonormale** si elle est orthogonale et si, pour tout  $i$ , on a  $\|e_i\| = 1$ .

**Propriétés.**

1) Inégalité de Cauchy-Schwarz :  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$

On définit une **norme** sur  $E$  en posant  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ .

2)  $2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$

3) Théorème de Pythagore :  $\operatorname{Re} \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

4) Comme  $E$  est de **dimension finie** alors  $E$  possède une base orthonormée.

5) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On appelle **orthogonal de  $F$**  l'espace  $F^\perp = \{u \in E; \text{ pour tout } x \in F \text{ on a } \langle u, x \rangle = 0\}$ .

Comme  $E$  est de **dimension finie** alors on a  $F \oplus F^\perp = E$  et  $(F^\perp)^\perp = F$ .

Ces 2 propriétés ne sont plus vraies en général si  $E$  est de **dimension infinie**.

**Théorème** Pour tout  $f \in E^*$ , il existe un unique vecteur  $a \in E$  tel que, pour tout  $y \in E$  alors  $f(y) = \langle a, y \rangle$ .

Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ . Il existe un unique endomorphisme de  $E$  vérifiant, pour tout  $x$  et  $y$  dans  $E$  la propriété :  $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$ . L'endomorphisme  $f^*$  s'appelle **l'adjoint** de  $f$ .

Si  $V \subset E$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $f$  alors  $V^\perp$  est stable par  $f^*$

Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans une base **orthonormée** alors la matrice de  $f^*$  dans cette même base est  ${}^t\overline{A}$ .