Ecole Polytechnique
Formation préparatoire

feuille n°2- Espaces euclidiens et hermitiens

Exercice 1. Soit E un espace euclidien dont on note $\langle\, ,\,\rangle$ le produit scalaire. Pour $a \in E$, on note $\varphi_a \in E^*$ définie par $\varphi_a(x) = \langle a, x\rangle$.

Montrer que l'application $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme de E dans E^*.

Exercice 2. (Procédé de Gram-Schmidt)

Soit E un espace euclidien de dimension n, dont on note $\langle\, ,\,\rangle$ son produit scalaire.

1) Soit $v_1, ..., v_n$ une base quelconque de E. Montrer par récurrence sur la dimension de E qu'il existe une unique base orthonormée $e_1, ..., e_n$ de E telle que $e_1 = v_1/\|v_1\|$, $\mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 + \ldots + \mathbb{R}v_i = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \ldots + \mathbb{R}e_i$ et$\langle v_i, e_i\rangle > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2) Soit u un endomorphisme de E trigonalisable. Montrer qu'il existe une base orthonormée de trigonalisation.

Exercice 3. Soit E un espace préhilbertien, dont on note $\|\ \|$ la norme associée. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

1) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $x - y$ soit orthogonal à tout élément de F. L'élément y est la projection orthogonale de x sur F et on le note $p_F(x)$.

2) Montrer que p_F est linéaire et 1-lipschitzienne.

3) Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $\inf\limits_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$.

Exercice 4. Notons $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace des polynômes de degré au plus 2.

1) Montrer que l'application $\langle P, Q\rangle := \int_0^1 P(x)\, Q(x)\, dx$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$.

2) Trouve une base orthonormale de $(\mathbb{R}_2[x], \langle\, ,\,\rangle)$.

3) Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\, dx$

Exercice 5. Soit E un espace euclidien, dont on note $\langle\, ,\,\rangle$ le produit scalaire. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.

1) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u^* tel que $\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ pour tout $x, y \in E$.

2) Montrer que $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$, et $\mathrm{Im}\, u^* = (\ker u)^\perp$.

Exercice 6. Soit M une matrice symétrique (c'est-à-dire ${}^tM = M$) à coefficients réels. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une matrice O orthogonale (c'est-à-dire ${}^tOO = \mathrm{Id}$) à coefficients réels telle que OMO^{-1} soit diagonale.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ du produit hermitien canonique

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i.$$

1) Montrer que les valeurs propres de f sont réelles.

2) Montrer, par récurrence sur n, qu'il existe une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour f.

3) Conclure.

Exercice 7.
1) Soit M une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres sont positives et non nulles. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive N telle que $M = N^2$.

2) Soit A une matrice carré inversible. Montrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique définie positive.

3) En déduire qu'il existe une unique matrice orthogonale O et une unique matrice symétrique définie positive S telle que $A = OS$.

4) Montrer que pour la décomposition précédente on a $OS = SO$ si et seulement si ${}^tAA = A{}^tA$.

Exercice 8. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels. On note $\operatorname{tr} M$ la trace d'une matrice M.

1) Montrer que l'application $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur E.

2) Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{S}$ pour ce produit scalaire.

Exercice 9. Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E c'est-à-dire satisfaisant $p \circ p = p$.

1) Montrer que $E = \ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$ et que la restriction de p à $\operatorname{Im}(p)$ est l'identité.

2) Un projecteur est dit *orthogonal* si son noyau et son image sont en somme directe orthogonale. Soit p est un projecteur. Montrer que les trois assertions sont alors équivalentes :
   (a) p est orthogonal ;
   (b) $p^* = p$;
   (c) pour tout $x \in E$ alors $\|p(x)\| \leq \|x\|$.