Ecole Polytechnique
Formation préparatoire - Mathématiques

Rappels d'algèbre linéaire

Dans tout ce qui suit E et F désignent des espaces vectoriels définis sur un corps K de dimension finie. (Le corps K sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en général).

I Vocalulaire - Généralités.

Soit $v_1, \dots v_k$ des vecteurs de E.

1. Les vecteurs $v_1, \dots v_k$ sont **linéairement indépendants** ou encore qu'ils forment une **famille libre** si , pour tous $\lambda_1, \dots \lambda_k$ dans K, on a l'implication

$$\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

   Les vecteurs $v_1, \dots v_k$ sont **linéairement dépendants** ou encore qu'ils forment une **famille liée** s'il existe $\lambda_1, \dots \lambda_k$ dans K tels que :
   il existe $j \in \{1, \dots, k\}$ vérifiant $\lambda_j \neq 0$ et $\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_k v_k = 0$.

2. Les vecteurs $v_1, \dots v_k$ **engendrent** E, ou encore forme une **famille génératrice** de E si pour tout $v \in E$, il existe $x_1, \dots, x_k$ dans K tels que $v = x_1 v_1 + \dots x_k v_k$.

3. Un espace vectoriel est de dimension finie s'il existe une famille finie de vecteurs qui engendrent E. Dans ce cas, une **base** de E est une famille génératrice et libre et toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments appelé la dimension de E.

Théorème de la base incomplète. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit k vecteurs linéairement indépendants $v_1, \dots v_k$ alors $k \leq n$ et il existe $n-k$ vecteurs $v_{k+1}, \dots v_n$ de E tels que $(v_1, \dots v_n)$ soit une base de E.

Applications linéaires

1. L'espace des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.
   Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. **L'image** de f est notée $f(E)$ ou $Im(f)$. La dimension $dimIm(f)$ de $Im(f)$ s'appelle le **rang** de f et on le note $rg\ f$.
   Le noyau de f, noté $Ker(f)$ est l'ensemble des $v \in E$ tels que $f(v) = 0$. On a toujours

$$dimKer(f) + dimIm(f) = dim\ E.$$

   L'application f est un **isomorphisme** si f est bijectif. Lorsque E et F sont de dimension finie et que $dimE = dimF$ alors "f est un isomorphisme" est équivalent à "f est injectif" ou encore à "f est surjectif". Un isomorphisme de E dans E est appelé **automorphisme**.

2. L'espace des **endomorphismes** de E est noté $End(E) = \mathcal{L}(E,E)$ ou $\mathcal{L}(E)$ et Id désigne l'endomorphisme identité de E.

3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base de E. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est représenté par la matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ dans la base $\mathcal{B}$ dont les coefficients de la j-ième colonne sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$.

4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots e'_n)$ deux bases de E. On note $P = (\mathcal{B}')_{\mathcal{B}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ dont les coefficients de la j-ieme colonne sont les coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$. Si X et X' sont les vecteurs colonnes des coordonnées de $x \in E$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors on a $X = PX'$. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)P$.
5. L'espace des **formes linéaires** sur E, appelé le **dual** de E, est noté $E^* = \mathcal{L}(E, K)$.
   Si $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base de E, la famille $(e_1^*, e_2^*, \dots e_n^*)$ dont les éléments sont définis par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ est une base de E^* appelée la **base duale** de $(e_1, e_2, \dots e_n)$ (Le symbole de Krônecker $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon). Ainsi si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors $e_j^*(x) = x_j$.
   Toute base de E^* est la base duale d'une base de E.
6. Si U est un sous-espace vectoriel de E, alors **l'orthogonal** U^0 de U est l'espace des formes linéaires sur E s'annulant sur U. Ainsi, si $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base de E telle que $(e_1, e_2 \dots e_p)$ soit une base de U, alors $(e_{p+1}^*, e_{p+2}^*, \dots e_n^*)$ est une base de U^0.

II Sur la réduction des endomorphismes.

Soit $f \in End(E)$.
On dit que $\lambda \in K$ est une **valeur propre** de f si $f - \lambda Id$ n'est pas injectif.
Un vecteur de E est un **vecteur propre** de f pour la valeur propre λ si $f(v) = \lambda v$.
L'espace $E(\lambda) = Ker(f - \lambda Id)$ des vecteurs propres de f pour la valeur propre λ est appelé le **sous-espace propre** de f relatif à λ.

Propriété. Si $P \in K[X]$, et si v est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ , alors v est un vecteur propre de $P(f)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

Soit A la matrice de f dans une base fixée de E. Alors le polynôme $C_f(X) = det(A - X\ Id)$ ne dépend que de f et s'appelle le **polynôme caractéristique** de f.

Proposition. Le scalaire λ est une valeur propre de f si et seulement si $C_f(\lambda) = 0$.

Proposition. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors la somme $E(\lambda_1) + E(\lambda_2) \dots + E(\lambda_r)$ est directe (on écrit $E(\lambda_1) + E(\lambda_2) \dots + E(\lambda_r) = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \dots \oplus E(\lambda_r)$).

Théorème. Soit λ une valeur propre de f et soit m_λ sa multiplicité (en tant que racine) dans C_f. On a alors $1 \leq dim\ E(\lambda) \leq m_\lambda$.

Définition. L'endomorphisme f est **diagonalisable** s'il existe une base de E formé de vecteurs propres pour f.

Proposition. Soit $n = dim\ E$ et $f \in End(E)$.
1) Si f a n valeurs propres deux à deux distinctes alors f est diagonalisable.
2) Soit $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r$ les valeurs propres de f. Alors,

$$f \text{ est diagonalisable si et seulement si } E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E(\lambda_r).$$

3) f est diagonalisable si et seulement si C_f a toutes ses racines dans K (on dit aussi que C_f est scindé dans K) et pour toute racine λ de C_f, on a $m_\lambda = dim\ E(\lambda)$.

Remarque. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E. Si f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ formée de vecteurs propres. Notons $f(u_i) = \lambda_i u_i$. Alors on a $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (les colonnes sont les coordonnées des u_i dans la base $\mathcal{B}$) et D est la matrice diagonale de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Théorème de Cayley-Hamilton. Pour tout $f \in End(E)$, on a $C_f(f) = 0$.

Définition. Soit λ une valeur propre de f de multiplicité m_λ dans C_f. Le sous-espace $Ker(f - \lambda\, Id)^{m_\lambda}$ est le **sous-espace caractéristique** de f relatif à λ.

Proposition Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ les valeurs propres de f alors la somme $Ker(f - \lambda_1\, Id)^{m_{\lambda_1}} + Ker(f - \lambda_2\, Id)^{m_{\lambda_2}} + \ldots + Ker(f - \lambda_r\, Id)^{m_{\lambda_r}}$ est directe.

De plus, les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) C_f est scindé sur K,
(b) f est trigonalisable (c'est-à-dire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire),
(c) E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de f.

Définition et proposition Soit $f \in End(E)$. Il existe un unique polynôme unitaire $M_f \in K[X]$ tel que

(a) $M_f(f) = 0$
(b) si $P \in K[X]$ vérifie $P(f) = 0$ alors M_f divise P.
Le polynôme M_f est le **polynôme minimal** de f.

Corollaire 1) M_f divise C_f.
2) L'endomorphisme f est diagonalisable dans K si et seulement si M_f a toutes ses racines dans K et qu'elles sont simples (on dit que M_f est scindé à racines simples dans K).
3) L'endomorphisme f est diagonalisable dans K si et seulement si il existe $P \in K[X]$ scindé à racines simples tel que $P(f) = 0$.

Définition. L'endomorphisme f est dit nilpotent s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $f^r = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{r \text{ fois}} = 0$.

Propriétés. 1) Si f est nilpotent alors son unique valeur propre est 0.
2) f est nilpotent si et seulement si $C_f(X) = (-X)^n$ où n est la dimension de E.

Théorème. Soit $f \in End(E)$ tel que C_f soit scindé sur K. Il existe deux uniques endomorphismes d et n tels que
(1) $f = d + n$
(2) $d \circ n = n \circ d$
(3) d est diagonalisable et n est nilpotent.