Feuille d'exercices n^{o}25 : Séries numériques

Exercice 1 [Natures de séries à termes positifs 1]
Déterminer la nature des séries suivantes de terme général :

1. $\dfrac{\ln(n)}{n^5}$;
2. $e^{-\sqrt{5+n}}$;
3. $\dfrac{n^4\ln(3n)}{e^{2n}}$;
4. $\ln\left(\dfrac{3+\sin\frac{1}{n}}{3-\sin\frac{1}{n}}\right)$;
5. $\dfrac{n+e^{-n}}{(n+1)^3}$;
6. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$;
7. $\dfrac{(-1)^n\cos(n)}{n^2\sqrt{n}}$;
8. $\sqrt{n^2-1}-n$;
9. $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$;
10. $\dfrac{1}{n^2+\sin n^6}$;
11. $\dfrac{2+(-1)^n}{3^n}$;
12. $\dfrac{1}{\binom{n}{2}}$;
13. $\ln\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}$;
14. $\sin\frac{1}{n}-\tan\frac{1}{n}$;
15. $\dfrac{n}{(n+1)!}$;
16. $\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$;
17. $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$;
18. $\dfrac{1}{n^2-\ln(n)}$;
19. $\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$;
20. $\dfrac{(\ln(n))^n}{n^{\ln(n)}}$;
21. $\dfrac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$.

Exercice 2 [Natures de séries à termes positifs 2]
On suppose que la série $\sum u_n$ est une série convergente à termes positifs. Déterminer la nature des séries de terme général :

1. u_n^2 ;
2. $\dfrac{u_n}{1+u_n}$;
3. $\dfrac{u_n}{1-u_n}$;
4. $\sqrt{u_nu_{n+1}}$;
5. $\sqrt{u_nu_{2n}}$;
6. $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Inversement, pour chacune des séries ci-dessus, la converge implique-t-elle celle de la série $\sum u_n$?

Exercice 3 [Natures de séries à termes positifs 3]
Dire en fonction des paramètres si les séries de terme général suivant convergent :

1. $e^{\frac{1}{n}}-a-\frac{b}{n}$ $(a,b\in\mathbb{R})$;
2. $\cos\frac{1}{n}-a-\frac{b}{n}$ $(a,b\in\mathbb{R})$;
3. $\dfrac{1}{an+b}-\dfrac{c}{n}$ $(a,b,c\in\mathbb{R},$ $(a,b)\neq(0,0))$;
4. $\dfrac{a^n}{1+b^n}$ $(a,b\in\mathbb{R}_+^*)$;
5. $\operatorname{Arctan}(n+a)-\operatorname{Arctan}(n)$ $(a\in\mathbb{R})$;
6. $\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+k)!}$ $(k\in\mathbb{N})$;
7. $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$ $(a,b\in\mathbb{R})$;
8. $\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$ $(a,b\in\mathbb{R})$;
9. $\dfrac{a}{\sqrt{3n+1}}+\dfrac{b}{\sqrt{3n+2}}+\dfrac{c}{\sqrt{3n+3}}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$

Exercice 4 [Critère de Cauchy]
On considère $\sum u_n$ une série à termes positifs, et on suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=l\in\overline{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que, si $l<1$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que, si $l>1$, alors $\sum u_n$ diverge.
3. Monter que, lorsque $l=1$, on ne peut rien conclure a priori.

Exercice 5 [Utilisation d'une application sur $\mathbb{N}^*$]
On considère $\varphi:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, et on s'intéresse à la nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{\varphi(n)}{n^2}$.

1. Montrer que, si φ est strictement croissante, alors $\sum u_n$ diverge.
2. On suppose ici que φ est bijective.

(a) Justifier que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\{\varphi(n) \mid n \in [\![N+1;3N]\!]\}$ contient au moins N éléments supérieurs ou égaux à N.

(b) En déduire une minoration de $\sum_{n=N+1}^{3N} u_n$, puis que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 6 [Puissance d'une série par une suite]

On considère (u_n) une suite réelle positive et (v_n) une suite réelle. On suppose que $v_n = 1 + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ et que la série $\sum u_n$ converge.

Montrer que la série $\sum u_n^{v_n}$ converge.

Exercice 7 [Produit d'une suite par une puissance]

On considère (u_n) positive décroissante et $\alpha > 0$ tels que la série $\sum n^\alpha u_n$ converge.

Montrer que $\sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_k \geqslant n^{\alpha+1} u_{2n}$, et en déduire que la suite $(n^{\alpha+1} u_n)$ tend vers 0.

Exercice 8 [Suite récurrente à paramètre]

On considère $\alpha \in \mathbb{R}$, et (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n^\alpha}$.

Étudier suivant la valeur de α la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 9 [Un calcul de puissance]

Monter que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le réel $(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$ est un entier pair, et en déduire la nature de la série $\sum \sin\left(\pi(1+\sqrt{3})^n\right)$.

Exercice 10 [Limite d'un produit]

On considère (u_n) une suite de réels strictement positifs, et on pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n)}.$$

1. Exprimer simplement les sommes partielles de la série $\sum v_n$, et en déduire que $\sum v_n$ converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \prod_{k=0}^{n} (1+u_n)$. Montrer que la suite (U_n) converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge (on pourra utiliser la fonction ln).
3. En déduire que l'on a l'équivalence :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = 1 \Leftrightarrow \sum u_n \text{ diverge.}$$

Exercice 11 [Calcul de sommes]

Montrer la convergence des séries suivantes, et calculer leurs sommes :

1. $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2+2n}$;
2. $\sum \dfrac{1}{2^n} \tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

   Indication : simplifier $\dfrac{1}{\tan(x)} - \dfrac{2}{\tan(2x)}$.
3. $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^2-1}$;
4. $\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right)$;
5. $\sum \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$;

   Indication : utiliser la formule de $\tan(a-b)$.

Exercice 12 [Polynômes et série exponentielle]

On considère $x \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{P(n)x^n}{n!}$ est absolument convergente.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = X(X-1)\dots(X-k+1)$. Montrer que la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :$\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_k(n)}{n!} x^n = x^k e^x$.
4. En déduire qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ de même degré que P tel que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P(n)x^n}{n!} = Q(x)e^x$.
5. **Application :** déterminer la somme de la série $\sum \dfrac{2n^3+n^2+n+3}{n!} 2^n$.

Exercice 13 [Séries géométriques dérivées]

On considère $x \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. En utilisant l'inégalité de Taylor–Lagrange, montrer que la série $\sum \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in]-1;1[$, et que sa somme vaut $(1+x)^\alpha$.
2. À l'inverse, montrer que cette série diverge grossièrement si $|x| \geqslant 1$, à moins que $\alpha \in \mathbb{N}$ (auquel cas la série est une somme finie).
3. Expliciter la formule précédente lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}_-$. Plus précisément, montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$, alors :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\dots(n+k-1)(n+k)x^k = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$
et interpréter ce résultat lorsque $k = 1, 2, 3$.
4. En déduire que, si P est un polynôme, la série $\sum P(n)x^n$ est absolument convergente pour $x \in]-1;1[$ et diverge grossièrement sinon, et que sa somme est une fraction rationnelle en x dont le seul pôle est 1, d'ordre au plus $\deg(P)+1$.

   Indication : on pourra commencer par décomposer P dans la base $(1, X+1, (X+1)(X+2), (X+1)(X+2)(X+3), \dots)$.
5. **Application :** déterminer la somme de la série $\sum \dfrac{n^3-2n^2+1}{3^n}$.

Exercice 14 [Encadrement d'une somme partielle]

À l'aide de comparaison avec des intégrales, déterminer la partie entière de $\sum_{n=1}^{10^9} \dfrac{1}{n^{2/3}}$.

Exercice 15 [Comportement en 1 de la fonction ζ]

Pour $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer un équivalent de $\zeta(\alpha)$ pour α tendant vers 1^+.

Exercice 16 [Série construite à partir des sommes partielles]

On considère $\sum u_n$ une série divergente de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que pour tout $\alpha > 1$ la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

Exercice 17 [Équivalent de $\ln(n!)$ (sans Stirling)]

Interpréter $\ln(n!)$ comme la somme partielle d'une série divergente, et calculer un équivalent par comparaison avec des intégrales.

Exercice 18 [Comparaison à une intégrale et paramètre]

Discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, de la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$.
Faire la même chose avec la série $\sum(-1)^n u_n$.

Exercice 19 [Développement asymptotique de la série harmonique]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

1. Montrer que $H_n \sim \ln(n)$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la convergence de la série $\sum v_n$, et en déduire que la suite (u_n) converge. On notera γ sa limite.
3. On pose $w_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Donner un équivalent de $t_n = w_{n+1} - w_n$, puis un équivalent du reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} t_k$, et en déduire que $H_n \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 20 [Natures de séries à termes de signe variable]

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$;
2. $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$;
3. $\dfrac{(-1)^n\ln(n)}{\sqrt{n+1}}$;
4. $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$;
5. $\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$;
6. $\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)}$;
7. $\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$;
8. $\ln(n)\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$;
9. $\dfrac{(-1)^n\ln(n)+1}{n\ln(n)}$;
10. $\int_0^1 \dfrac{(-1)^n}{(1+t^\alpha)^n}\mathrm{d}t$ (pour $\alpha > 0$) ;
11. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$;
12. $(-1)^n\left(e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$;
13. $(1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$.
14. $\sin(n\pi+\frac{\pi}{n})$;
15. $\cos(n^2\pi\ln(1-1/n))$;
16. $\sin\sqrt{1+n^2\pi^2}$;
17. $\sin(\pi e n!)$;
18. $\sin(2\pi e n!)$.

Exercice 21 [Équivalence à une série alternée]

On considère $\alpha > 0$ et on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

Étudier, suivant la valeur de α, la convergence (absolue ou non) de la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Exercice 22 [Une suite définie implicitement]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit u_n comme l'unique solution de $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $\ln(x) = \mathrm{Arctan}(x) + n\pi$.

Justifier que la suite (u_n) est bien définie, et donner un encadrement de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra s'aider d'un encadrement de $\mathrm{Arctan}(x)$. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{u_n}$.

Exercice 23 [La transformation d'Abel, ou généralisation des séries alternées]

On considère (u_n) suites positive décroissante tendant vers 0 de réels, et (v_n) suite de complexes telles que les sommes partielles $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ forment une suite bornée.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sum_{k=0}^n u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)V_k$. Ce résultat ressemble-t-il a un résultat analogue avec des intégrales ?
2. En déduire que la série $\sum u_n v_n$ converge.
3. Retrouver le critère des séries alternées.
4. En déduire que, si $\sum v_n$ converge et si $\alpha > 0$, alors la série $\sum \dfrac{v_n}{n^\alpha}$ converge.

5. On considère $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{N}$. Discuter, suivant la valeur de θ, de la convergence de la série de terme général $\dfrac{\cos}{n^\alpha}$.

Exercice 24 [Réarrangement dans la série harmonique alternée]

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

1. La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?
2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge vers $\ln(2)$ (on pourra appliquer l'inégalité de Taylor–Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
3. On définit l'application $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ par :

$$\sigma(n) = \begin{cases} 4k & \text{si} \quad n = 3k \\ 2k+1 & \text{si} \quad n = 3k+1 \\ 4k+2 & \text{si} \quad n = 3k+2 \end{cases}$$

   (a) Montrer que σ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, et calculer les premiers termes de la suite $(\sigma(n))$.
   (b) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$ la quantité : $u_{\sigma(3k+1)} + u_{\sigma(3k+2)} + u_{\sigma(3k+3)}$.
   (c) En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{n=1}^{3N+3} u_{\sigma(n)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N+2} u_k.$$

   (d) En déduire la nature de la série $\sum u_{\sigma(n)}$ ainsi que sa somme. Commenter.
4. On définit l'application $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ par :

$$\sigma(n) = \begin{cases} 2k-1 & \text{si } n = k^2 \\ 2(n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor) & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Montrer que σ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, et calculer les premiers termes de la suite $(\sigma(n))$.
   (b) Donner des équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$ et $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1}$.
   (c) En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, un équivalent de : $\sum_{n=1}^{N^2} u_{\sigma(n)}$.
   (d) En déduire que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ tend vers $+\infty$ (on procèdera par encadrement en utilisant la question précédente).

Exercice 25 [Théorème de réarrangement de Riemann]

On considère $\sum u_n$ une série à valeurs réelles semi-convergente (la série converge, mais pas absolument).

1. Montrer que les séries $\sum(u_n \pm |u_n|)$ divergent, de limites $\pm\infty$.
2. En déduire que pour tout $l \in \overline{\mathbb{R}}$ il existe $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ tend vers l (on pourra traiter à part les cas où l est fini ou non).

Exercice 26 [Sommabilité d'une famille]

On considère $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, et on s'intéresse à la famille $\left(\dfrac{1}{a^n + b^m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$.

1. On suppose que $a \leqslant 1$. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{a^n+1}$, et en déduire que la famille considérée n'est pas sommable. Que penser du cas où $b \leqslant 1$?
2. On suppose que $a, b > 1$, et on pose $c = \min(a, b)$.

(a) Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\sum_{n+m=k} \frac{1}{a^n + b^m} \leqslant \frac{(k+1)}{\sqrt{c}^k}$$

(b) En déduire que la famille considérée est sommable.

Exercice 27 [Sommabilité d'une famille à paramètre]

Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la famille $(\dfrac{1}{(m+n)^\alpha})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

Exercice 28 [Sommabilité d'une famille de restes]

On considère $\alpha > 1$ et on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ le reste de la série de Riemann de paramètre α.

1. Justifier que R_n est bien défini, et en donner un équivalent.
2. En déduire les valeurs de α pour lesquelles la série $\sum R_n$ converge.
3. Plus généralement, montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{l^{\alpha-1}}$$

et retrouver le résultat précédente par sommation par paquets.

Exercice 29 [De l'arithmétique ? Ici ?]

On considère $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| < 1$. Montrer que la famille $(z^{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable, et en déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{m=1}^{+\infty} d(m) x^m$$

où $d(m)$ est le nombre de diviseurs positifs de m.

Exercice 30 [Sommabilité d'une famille construite à partir d'une série]

On considère $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ une série à termes complexes absolument convergente. En utilisant le théorème de sommation par paquets, montrer que la famille $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_{n,m} = \begin{cases} \dfrac{n}{m(m+1)} a_n & \text{si} \quad n \leqslant m \\ 0 & \text{si} \quad n > m \end{cases}$$

est sommable, et calculer sa somme.

Exercice 31 [Produit de convolution]

On considère $E = l^1(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que, si $u, v \in E$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a également $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}} \in E$.
2. Pour $u, v \in E$, on pose : $(u \star v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$. Montrer que $u \star v \in E$ et que : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u \star v)_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\right) \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\right)$.
3. Montrer que la loi $\star$ est une lci commutative, associative et possédant un élément neutre.
4. La loi $\star$ fait-elle de E un groupe ?

Exercice 32 [Un produit de Cauchy]

Pour $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|, |b| < 1$, montrer que :

$$\frac{1}{(1-a)(1-b)} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} & \text{si} \quad a \neq b \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a^n & \text{si} \quad a = b \end{cases}.$$