Feuille d'exercices n^{o}22 : Matrices et applications linéaires

Exercice 1 [Détermination de matrices d'applications linéaires]

Déterminer les matrices des applications suivantes dans les bases canoniques :

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y-2x, y+3z) \end{array} \right.$;
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array} \right.$;
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(1), P'(1)) \end{array} \right.$;
4. $f_4 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;
5. $f_5 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$;
6. $f_6 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M + M^T \end{array} \right.$.

Exercice 2 [Matrice de Vandermonde]

On considère $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, et on définit l'application : $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{K}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$.

1. En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{C}$ celle de $\mathbb{K}^n$, donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les x_i pour qu'il existe $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(\varphi) = I_n$ et donner alors $\mathcal{B}'$.
3. En déduire que, pour tous $i, j \in [\![0, n]\!]$ avec $i < j$ on a :$\sum_{k=i}^{j} (-1)^{j-k} \binom{k}{i} \binom{j}{k}$.

Exercice 3 [Calcul d'inverse d'une matrice]

On considère $n \in \mathbb{N}$, et on pose $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ définie par : $\forall i, j \in [\![1, n+1]\!],\ a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$.

1. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ muni de sa base canonique.
2. En déduire que A est inversible, et donner son inverse.

Exercice 4 [Quelques calculs de rangs]

Déterminer les rangs des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ i & -i & 1 & 1 \\ 0 & 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$.

Exercice 5 [Rangs de matrices à paramètres]

Discuter suivant les valeurs des paramètre des rangs des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) \\ \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cos(3\theta) \\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cos(4\theta) \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & b \\ b & 0 & & a \end{pmatrix}$.

Exercice 6 [Matrices de rang 1]

Montrer que les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang 1 sont exactement les matrices de la forme $X \cdot Y^T$ pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tous les deux non nuls. Une telle écriture est-elle unique ?

Exercice 7 [Inversibilité matricielle et somme des coefficients]

On considère $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}$. Montrer que A est inversible.
2. On suppose que : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 0$. Montrer que A n'est pas inversible.
3. On suppose que : $\forall j \in [\![1;n]\!],\ \sum_{i=1}^n a_{i,j} = 0$. Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 8 [Décomposition d'une matrice en produit]

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer qu'il existe deux matrices $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = BC$.

Exercice 9 [Changement de base pour un vecteur]

Soit $\mathcal{B}' = ((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1))$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$, calculer les matrices de passage entre $\mathcal{B}'$ et la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et en déduire les coordonnées du vecteur $u = (2,1,-3,4)$ dans cette base.

Exercice 10 [Changement de base pour un endomorphisme 1]

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs $e_1' = 2e1 + 3e_2 + e_3, e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3, e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 11 [Changement de base pour un endomorphisme 2]

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par : $f(x,y,z) = (2x+2y+z, -2x-y, x+y-z)$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$, et donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
3. En déduire $f \circ f \circ f$.

Exercice 12 [Changement de base pour un endomorphisme 3]

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ définie par : $f(x,y,z) = \displaystyle\int_0^2 \frac{xt^2+yt+z}{(t+1)(t-3)}\mathrm{d}t.$

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((0,1,1),(0,1,-3),(1,-2,-3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f est linéaire, et déterminer l'image de $\mathcal{B}$ par f.
3. En déduire une expression simple de $f(x,y,z)$ pour tous $x,y,z \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 [Matrices équivalentes à une matrice nilpotente]

On considère $n \in \mathbb{N}^*$, et on fixe $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note $\mathcal{B}(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, ainsi que f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à J.

1. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ exprimer $f(e_i)$, et en déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$ la valeur de $f^k(e_i)$.
2. En déduire le rang de J ainsi que ceux des puissances de J, et que J est nilpotente.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit équivalente à une matrice nilpotente.

Exercice 14 [Matrices semblables à une matrice nilpotente]

Montrer qu'une matrice est semblable à une matrice nilpotente si, et seulement si, elle est elle-même nilpotente.

Exercice 15 [Endomorphisme nilpotent d'indice maximal]

On considère E espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n, c'est-à-dire que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ forme une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans cette base, ainsi que celles de $f^2, \ldots, f^{n-1}$.
3. En déduire que les endomorphismes qui commutent avec f sont exactement les polynômes en f, c'est-à-dire que :
$$\{g \in \mathcal{L}(E) \,|\, g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}\left(\text{id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\right).$$

Exercice 16 [Décomposition d'une matrice]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$, et montrer que ces espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base adaptée à cette décomposition, et écrire la matrice de f dans cette base.
3. En déduire que f est la composée de deux endomorphismes usuels.

Exercice 17 [Rangs de matrices semblables]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices.

1. Montrer que les matrice A et B sont semblables, si, et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ les matrices $(A + \lambda I_n)$ et $(B + \lambda I_n)$ sont semblables.
2. En déduire que, si A et B sont semblables, alors : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{rg}(A + \lambda I_n) = \text{rg}(B + \lambda I_n)$. Que dire de la réciproque ?

Exercice 18 [Diagonalisation de matrice]

On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires (non nécessairement distincts).

1. On suppose que $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $D - \lambda 8n$ est non inversible si, et seulement si : $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Montrer de même que, si A est semblable à D, alors $A - \lambda I_n$ est non inversible pour la même condition.
2. Réciproquement, on considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $A - \lambda I_n$ est non inversible si, et seulement si, $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Montrer que, si les λ_i sont deux-à-deux distincts alors A est semblable à $\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Que se passe-t-il si des λ_i sont égaux ?

Exercice 19 [Solution d'une équation matricielle]

Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $AB - BA = I_n$.

Exercice 20 [Trace et transposée]

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Exprimer $\mathrm{tr}(A^T \cdot A)$ en fonction des coefficients de A.
2. En déduire que, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors : $\mathrm{tr}(A^T \cdot A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

Exercice 21 [Trace et matrices symétriques]

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(A^2) \geqslant 0$.
2. Montrer que $\mathrm{tr}(AB)^2 \leqslant \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2)$ (on pourra étudier la fonction $\lambda \mapsto \mathrm{tr}\left((\lambda A + B)^2\right)$.

Exercice 22 [Projecteur et endomorphismes de rang 1]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que :

$$\{p \text{ projecteur de } E \text{ de rang } 1\} = \{f \in \mathcal{L}(E) \,|\, \mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1\}.$$

Plus généralement, montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est de rang 1, alors $f^2 = \mathrm{tr}(f) \cdot f$.

Exercice 23 [Caractérisation d'une matrice par les traces]

On considère $n, p \in \mathbb{N}^*$, et pour $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$ on note $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice élémentaire d'indice (i,j).

1. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, déterminer $\mathrm{tr}(A \cdot E_{i,j})$.
2. En déduire que l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) & \to & (\mathcal{M}_{n,p})^* \\ A & \mapsto & (M \mapsto \mathrm{tr}(AM)) \end{array} \right.$$

   est un isomorphisme.

Exercice 24 [Une symétrie cachée]

Donner une condition sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $(AB - BA)^2 = I_n$.

Exercice 25 [Endomorphismes préservant la trace]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

1. Soit φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(AB) = \varphi(BA)$. Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$.
2. En déduire que, si $\psi \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$ vérifie $\psi(I_n) = I_n$ et $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \psi(AB) = \psi(BA)$, alors ψ conserve la trace.

Exercice 26 [Caractérisation des matrices de trace nulle]

Montrer que toute matrice carrée de trace nulle est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

On pourra procéder par récurrence sur la dimension de la matrice, en traitant à part le cas des homothéties.