Feuille d'exercices n^{o}20 : Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1 [Corps et sev 1]

On considère $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev, et donner ses sev.

Exercice 2 [Corps et sev 2]

On considère $\omega \in \mathbb{C}$ et on pose $\omega\mathbb{R} = \{\omega x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont $\omega\mathbb{R}$ est un sev.
À quelle condition sur ω l'ensemble $\omega\mathbb{R}$ est-il un sev de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 3 [Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$]

Dire si les ensembles suivants sont ou non des sev de $\mathbb{R}^2$:

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leqslant y\}$;
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}$;
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\}$;
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = a\}$ (pour $a \in \mathbb{R}$ fixé).

Exercice 4 [Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$]

Dire si les ensembles suivants sont ou non des (sous-)espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

1. les suites bornées ;
2. les suites convergentes ;
3. les suites ayant une limite ;
4. les suites tendant vers a (pour $a \in \mathbb{R}$ fixé) ;
5. les suites géométriques ;
6. les suites arithmétiques ;
7. les suites arithmético-géométriques ;
8. les suites linéaires récurrentes d'ordre 2.
9. les suites périodiques ;
10. les suites monotones.

Exercice 5 [Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$]

Dire si les ensembles suivants sont ou non des (sous-)espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

1. les fonctions monotones ;
2. les fonctions qui s'annulent ;
3. les fonctions qui s'annulent en a (pour $a \in \mathbb{R}$ fixé) ;
4. les fonctions paires ;
5. les fonctions impaires ;
6. les fonctions périodiques ;
7. les fonctions T-périodiques (pour $T > 0$ fixé) ;
8. les fonctions f continues telles que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ (pour $[a,b] \subset \mathbb{R}$ fixé) ;
9. les fonctions f dérivables telles que $f'(a) = 0$ (pour $a \in \mathbb{R}$ fixé).

Exercice 6 [Et d'autres sous-espaces vectoriels]

Dire si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1. les matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
2. les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
3. les matrices non-inversibles ;
4. les matrices scalaires ;
5. les polynômes dont a est de multiplicité m (pour $a \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$ fixés) ;
6. les polynômes dont 0 est multiplicité au moins m (pour $m \in \mathbb{N}$ fixé) ;
7. les polynômes de degré 4 ;
8. les polynômes de degré au moins 4 ;
9. les polynômes de degré au plus 4.

Exercice 7 [Union d'espaces vectoriels]

Soient E un ev et F, G deux sev de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour que $F \cup G$ soit un sev de E.

Exercice 8 [Familles libres et bases dans $\mathbb{R}^3$]

Pour chacune des familles suivantes, dire si elles sont libres ou non et donner une base de l'espace vectoriel engendré :

1. $((1,0,1),(1,2,2))$;
2. $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$;
3. $((1,2,1),(2,1,-1),(1,-1,-2))$;
4. $((1,-1,1),(2,-1,3),(-1,1,-1))$.

Exercice 9 [Familles libres et bases dans d'autres ev]

Pour chacune des familles suivantes, dire si elles sont libres ou non et donner une base de l'espace vectoriel engendré :

1. $\left((X+a_k)^k\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$ et $(a_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ fixée ;
2. $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$ pour $a \neq b \in \mathbb{C}$;
3. $\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$;
4. $(x \mapsto \sin(x), x \mapsto \sin(2x), x \mapsto \sin(3x))$.

Exercice 10 [Bases d'espaces vectoriels]

Donner des bases aux espaces vectoriels suivants (on ne demande pas de montrer qu'il s'agit d'espaces vectoriels) :

1. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y+z+t = x+2y+3z+4t = 0\}$;
2. $\{P \in \mathbb{R}_5[X] \,|\, P(a) = P(b) = 0\}$ (pour $a \neq b \in \mathbb{R}$) ;
3. $\{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(a) = P(b) = 0\}$ (pour $a \neq b \in \mathbb{R}$) ;
4. $\{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, y'' = 4y' - 3y\}$;
5. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n\}$;
6. $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0\}$;
7. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$;
8. $\{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, a_{1,1} + a_{2,2} = 0\}$.

Exercice 11 [Famille de fonctions trigonométriques]

Montrer que la famille $(\cos, \sin, x \mapsto x\cos(x), x \mapsto x\sin(x))$ est libre, mais que, peu importe la valeur de $a, b, c \in R$ les familles $(x \mapsto \cos(x+a), x \mapsto \cos(x+b), x \mapsto \cos(x+c))$.

La famille $(\sin, \cos, x \mapsto \sin(2x))$ est-elle libre ?

Exercice 12 [Altération d'une famille libre 1]

Soit (x,y,z) une famille libre de E. Montrer que la famille $(y+z, z+x, x+y)$ est libre.

Exercice 13 [Altération d'une famille libre 2]

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre de E. On pose $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ (pour (α_i) famille de scalaires). Donner une condition nécessaire et suffisante sur les α_i pour que la famille $(x_i + y)$ soit libre.

Exercice 14 [Une famille libre infinie sur les suites]

On se place sur $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et on considère la famille indexée par $k \in \mathbb{N}$ suivante : $(u_n^{(k)}) = (\delta_{k,n})$ (c'est-à-dire que le k-ème terme de $u^{(k)}$ vaut 1 et les autres sont nuls).

Montrer que la famille $(u^{(k)})$ est libre, mais que ce n'est pas une base. Et essayer de donner une description simple de $\mathrm{Vect}\left(u^{(k)},\ k \in \mathbb{N}\right)$.

Exercice 15 [Familles libres infinies sur les fonctions]

Montrer que les famille de fonctions $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ et $(g_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ pour $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ et $g_\lambda : x \mapsto |x-\lambda|$ sont des familles libres de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 16 [Base sur les suites périodiques]

On fixe $p \in \mathbb{N}^*$:

1. Donner une base de l'ensemble des suites réelles p-périodiques.
2. Montrer que l'on peut trouver une base de l'ensemble des suites complexes p-périodiques constituée de suites géométriques.

Exercice 17 [Caractérisation des bases]

Soit E un espace vectoriel. On considère la famille $(x_i)_{i\in I}$. Montrer que cette famille est une base si, et seulement si :

1. elle est libre maximale : c'est-à-dire qu'elle est libre et que, pour tout $y \in E$, la famille $(x_i) \cup \{y\}$ est liée ;
2. elle est génératrice minimale : c'est-à-dire qu'elle est génératrice et que, pour tout $i_0 \in I$, la famille $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ n'est pas génératrice.

Exercice 18 [Somme et intersection d'espaces vectoriels]

Soient F, G deux sev de E. Montrer que : $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$.

Exercice 19 [Espaces de fonctions supplémentaires]

On considère les espaces :

$$F_1 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f(0) = f(1)\},\ F_2 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\},\ G = \mathrm{vect}(x \mapsto x).$$

Montrer que $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$.

Exercice 20 [Espaces de polynômes supplémentaires]

On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $G = \{P \in E \,|\, P(1) = P'(1) = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E, et donner la décomposition correspondante pour $1, X, X^2, X^3$.

Exercice 21 [Et avec davantage d'espaces]

On considère $F_1, \dots, F_n$ des sev de E.

1. Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si, et seulement si :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \left(\sum_{i\neq k} F_i\right) \cap F_k = \{0\}.$$

2. Donner un exemple de F_1, F_2, F_3 sev de E tels que pour tous $i \neq j$ on a $F_i \cap F_j = \{0\}$ mais la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe. Que peut-on dire si de plus $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{0\}$?

Exercice 22 [Applications linéaires ou non]

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires, et si c'est le cas déterminer leurs noyaux et leur image (qu'on essaiera d'écrire simplement, et dont on donnera une base sinon) :

1. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-2y, 0)$;
2. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-2y, 1)$;
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x,x,x)$;
4. $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X],\ P \mapsto P(1) + P'(1) + P''$;
5. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto f' - 3f$;
6. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto 2f \cdot f'$;
7. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$;
8. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$;
9. $\mathbb{R}^\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^\mathbb{N},\ (u_n) \mapsto (u_{n+1} - u_n)$;
10. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto M^T$;
11. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto A \cdot M$ (pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée).

Exercice 23 [Morphisme d'évaluation]

Soit Ω un ensemble, E un espace vectoriel, et $a \in \Omega$. Montrer que l'application

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(\Omega, E) & \to & E \\ f & \mapsto & f(a) \end{array} \right.$$

est une application linéaire de $\mathcal{F}(\Omega, E)$ dans E, et déterminer son image et son noyau.

Exercice 24 [Inclusion d'espaces images]

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si A, B sont deux sev de E, montrer que :

$$f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + \mathrm{Ker}f \subset B + \mathrm{Ker}f.$$

Exercice 25 [Espace engendré et image]

Soient E, F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A \subset E$. Montrer que : $f\left(\mathrm{vect}(A)\right) = \mathrm{vect}\left(f(A)\right)$.

Exercice 26 [Image et noyau d'une composée]

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}\left(\mathrm{Ker}g\right)$;
2. $\mathrm{Ker}(g \circ f) \supset \mathrm{Ker}f$;
3. $\mathrm{Im}(g \circ f) = g\left(\mathrm{Im}f\right)$;
4. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}g$;
5. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow \mathrm{Ker}g \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$;
6. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}f \Leftrightarrow \mathrm{Ker}g + \mathrm{Im}f = F$.

Exercice 27 [Image et noyau d'un endomorphisme]

Soient E un espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

1. $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$;
2. $E = \mathrm{Im}f + \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow \mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$.

Exercice 28 [Endomorphismes qui commutent]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer alors que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont stables par g.

Plus généralement, montrer que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}g$ sont stables par tout endomorphisme de la forme $P(g)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 29 [Images et noyaux itérés]

Soient E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$. Comparer :

1. $\mathrm{Ker}f^k$ et $\mathrm{Ker}f^{k+1}$;
2. $\mathrm{Im}f^k$ et $\mathrm{Im}f^{k+1}$.

Exercice 30 [Caractérisation des homothéties]

Soit E un espace vectoriel. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie si, et seulement si, pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.

Exercice 31 [Composée de projecteurs]

Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que :

1. $\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}q \Leftrightarrow (p \circ q = q \text{ et } q \circ p = p)$;
2. $\mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}q \Leftrightarrow (p \circ q = p \text{ et } q \circ p = q)$.

Exercice 32 [Somme de projecteurs]

Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si, et seulement si : $p \circ q = q \circ p = 0$, et qu'alors $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p \oplus \mathrm{Im}q$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$.

Exercice 33 [Inversibilité unilatérale]

Soient E un espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}g$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}g$.
3. Caractériser $g \circ f$.
4. Donner un exemple pour lequel $g \neq f^{-1}$.

Exercice 34 [Composition double]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g \circ f = f$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont supplémentaires dans E.
2. Montrer que $f(\mathrm{Im}g) = \mathrm{Im}f$.

Exercice 35 [Supplémentaire commun à deux hyperplans]

Soient F, G deux hyperplans d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G \neq E$, et en déduire qu'il existe un supplémentaire commun à F et G dans E.

Exercice 36 [Détermination d'une forme linéaire]

Donner l'expression générale de l'unique forme linéaire $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ telle que :

$$f(1,1,1) = 0,\ f(2,0,1) = 1 \text{ et } f(1,2,3) = 4$$

et donner une base de son noyau.

Exercice 37 [Forme linéaire sur les polynômes]

Soit $a \in \mathbb{K}$. On considère $\varphi \in (\mathbb{K}[X])^*$ non nulle telle que : $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \varphi((X-a)P) = 0$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \varphi(P) = \lambda P(a)$.

Exercice 38 [Translation et endomorphisme]

Soient E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\overrightarrow{a} \in E$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f et $\overrightarrow{a}$ pour que les applications f et $\tau_{\overrightarrow{a}}$ commutent.

Exercice 39 [Espaces affines disjoints et espaces affines parallèles]

Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines disjoints d'un espace vectoriel E. Montrer qu'il existe deux espaces affines $\mathcal{F}', \mathcal{G}'$ disjoints, de même direction, et contenant respectivement $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.