

Feuille d'exercices n°14 : Suites numériques

Exercice 1 [Inégalité et limites]

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites qui tendent vers l_1, l_2 avec $l_1 < l_2$. Montrer que, à partir d'un certain rang : $u_n < v_n$. Que dire si $l_1 \leq l_2$?

Exercice 2 [Critère de convergence de suites]

Montrer que les suites réelles (u_n) et (v_n) convergent dans les cas suivants, et préciser leurs limites :

1. (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans $[0; 1]$ et $\lim u_n v_n = 1$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq a$ et $v_n \leq b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) et $\lim u_n + v_n = a + b$;
3. les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent respectivement vers $a, b \in \mathbb{R}$;
4. $\lim (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$.

Exercice 3 [Suite d'entiers]

Montrer qu'une suite d'entier converge si, et seulement si, elle est stationnaire. Que dire de sa limite ?

Exercice 4 [Limites version ε]

En utilisant la définition de la limite ("avec des ε "), montrer que l'on a les limites suivantes :

1. $(\ln(n))$ tend vers $+\infty$;
2. (e^{-n}) tend vers 0 ;
3. $(\frac{1}{n})$ tend vers 0 ;
4. (\sqrt{n}) tend vers $+\infty$.

Exercice 5 [Quelques calculs de limites]

Déterminer les limites des suites dont le terme général est le suivant :

1. $\frac{1 - \sin^2(2n)}{\sqrt{n}}$;
2. $\sqrt{n} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \right]$;
3. $\frac{\sqrt{n}}{n}$;
4. $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$;
5. $\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$;
6. $(\sin(\frac{1}{n}))^{1/n}$.

Exercice 6 [Encadrements et limites de sommes]

À l'aide d'encadrements, déterminer les limites des sommes S_n suivantes :

1. $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$;
2. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$;
3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$;
4. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$;
5. $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$;
6. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.

Exercice 7 [Critère de d'Alembert]

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que $l \in \mathbb{R}_+$ ou $l = +\infty$.
2. Montrer que, si $l < 1$, alors (u_n) tend vers 0.
3. Montrer que, si $l > 1$, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
4. Montrer que, si $l = 1$, on ne peut pas conclure ni sur la convergence de (u_n) , ni sur sa limite éventuelle.

Exercice 8 [Critère de Cauchy]

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Montrer que les résultats de l'exercice précédente restent valables.

Exercice 9 [Vrai–Faux autour des suites]

Prouver ou invalider les affirmations suivantes (où (u_n) désigne une suite réelle) :

1. le produit de deux suites minorées est minoré ;
2. la somme de deux suites périodiques est périodique ;
3. si $|u_n|$ tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$;
4. si $u_n > 0$, alors (nu_n) tend vers $+\infty$;
5. si $u_n > 1$, alors (u_n^n) tend vers $+\infty$;
6. si (u_n^4) a une limite, alors (u_n^2) aussi ;
7. si u_n ne s'annule pas et u_n tend vers 0, alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers $+\infty$;
8. si u_n ne s'annule pas et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1, alors (u_n) converge ;
9. si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors (u_n) converge.

Exercice 10 [Un calcul de limite]

On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que (u_n) est monotone et à valeurs dans $[0, 1]$. En déduire qu'elle converge vers $l \in [0; 1]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$, et en déduire l .

Exercice 11 [Suite définie implicitement 1]

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n = \cos(x)$ admet une unique solution sur $[0; 1]$, que l'on notera x_n .
2. Montrer que la suite (x_n) ainsi définie est convergente, et donner sa limite.

Exercice 12 [Suite définie implicitement 2]

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x = 1$ admet une unique solution sur \mathbb{R}_+ , que l'on notera x_n .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x_n \in [1/2; 1]$.
3. Montrer que la suite (x_n) ainsi définie est convergente, et que sa limite l appartient à $[1/2; 1]$.
4. Calculer l .

Exercice 13 [Limites de sinus ou de cosinus]

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On note $(u_n) = (\cos(n\alpha))$ et $(v_n) = (\sin(n\alpha))$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n .
2. En déduire que (u_n) converge si, et seulement si, (v_n) converge.
3. En déduire que (u_n) et (v_n) divergent.
4. Que se passe-t-il si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$?

Exercice 14 [Théorème des intervalles emboîtés ?]

Montrer que le théorème des segments emboîtés devient faux si l'on remplace les segments par des intervalles quelconques dans les hypothèses de départ.

Exercice 15 [Moyenne arithmético-géométrique]

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que : $2\sqrt{ab} \leq a + b$.
2. On considère les suites $(u_n), (v_n)$ définies par :

$$u_0 = a, v_0 = b, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite, notée $M(a, b)$, appelée **moyenne arithmético-géométrique** de a et b .

3. Calculer $M(a, a)$ et $M(a, 0)$, et exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a, b)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$).

Exercice 16 [Séries alternées]

On considère (u_n) une suite décroissante tendant vers 0 et on pose pour $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.
Montrer que la suite (S_n) converge vers un réel l , et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|S_n - l| \leq u_{n+1}$.

Exercice 17 [Limite d'une somme]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

Montrer que les suite (u_n) et (v_n) sont adjacentes et en déduire la limite de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ et celle de $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$.

Exercice 18 [Une suite complexe]

Montrer que la suite complexe $(e^{i \ln(n)})$ diverge (on pourra étudier la suite extraite des termes de rang pair).

Exercice 19 [Suites réelles et suites complexes]

On considère $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2} \text{ et } v_n = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Exprimez simplement la suite $(w_n) = (u_n + iv_n)$ et en déduire les limites de (u_n) et (v_n) .

Exercice 20 [Suite extraite et suites monotone]

Soit (u_n) une suite monotone telle que la suite (u_{2n}) converge. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 21 [Limites de suites extraites]

Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites $(u_{2n}), (u_{3n})$ et (u_{2n+1}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 22 [Suite extraites d'une suite de chiffres]

Soit (u_n) la suite des décimales de π . Montrer que (u_n) admet une sous-suite convergente.

Exercice 23 [Double extraction et convergence]

Soient φ_1, φ_2 deux fonctions extractrices. Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ_1 et φ_2 telle que pour toute suite (u_n) :

1. (u_n) tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si, et seulement si, $(u_{\varphi_1(n)})$ et $(u_{\varphi_2(n)})$ tendent vers l ;
2. (u_n) a une limite si, et seulement si, $(u_{\varphi_1(n)})$ et $(u_{\varphi_2(n)})$ ont une limite.

Exercice 24 [Propriétés de suites extraites]

Montrer que toute suite extraite d'une suite monotone est aussi monotone de même monotonie.
Les suites extraites d'une suite périodique sont-elles périodiques ?

Exercice 25 [Suite de suites extraites]

Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$.

Montrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 26 [Suites sous-additives]

Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall n, m \in \mathbb{N}, u_{n+m} \leq u_n + u_m$.

Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ tend vers $\inf\left\{\frac{u_n}{n}, n \geq 1\right\}$ si cette quantité est finie, et $-\infty$ sinon.

On pourra raisonner traiter séparément les cas où l'ensemble précédent admet ou non une borne inférieure, et utiliser les définitions "avec ε " des limites pour montrer le résultat.

Exercice 27 [Suites arithmético-géométriques]

Donner les termes généraux des suites

arithmético-géométriques données par les égalités suivantes :

1. $u_0, u_{n+1} = 2u_n + 1;$

2. $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}.$

Exercice 28 [Doubles suites arithmético-géométriques]

Soient $(u_n), (v_n)$ les suites définies par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
2. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont chacune arithmético-géométriques, et donner la relation de récurrence qui les définit.
3. Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 29 [Suites linéaires récurrentes d'ordre 2]

Donner les termes généraux des suites linéaires récurrentes données par les égalités suivantes :

1. $u_0 = 1, u_1 = 0, u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0;$

3. $u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0;$

2. $u_0 = 1, u_1 = -1, u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0;$

4. $u_0 = 1, u_1 = 1, u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$

Exercice 30 [Équation fonctionnelle et suite linéaire récurrente]

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x).$$

On fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$, et on définit la suite (u_n) par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que (u_n) est une suite linéaire récurrente d'ordre 2.
2. En déduire une expression de (u_n) en fonction de n .
3. En déduire $f(a)$, et conclure quant aux possibilités pour la fonction f .