Feuille d'exercices n^{o}11 : Arithmétique dans les entiers

Exercice 1 [Quelques divisibilités]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

1. $7 | 3^{2n+1} + 2^{n+2}$;
2. $16 | 5^n - 1 - 4n$;
3. $6 | n(n+2)(7n-5)$.

Exercice 2 [Entiers algébriques]

1. Soit $x \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $x \in \mathbb{Z}$.
2. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation : $(E) : x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$. Montrer que les solutions de (E) sont soit entières, soit irrationnelles, et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 3 [Nombres non premiers consécutifs]

Montrer qu'il existe 1000 entiers consécutifs qui ne sont pas premiers.

Exercice 4 [Divisibilité de coefficients binomiaux]

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les entiers $(n+1)$ et $(2n+1)$ sont premiers entre eux.
En déduire que $(n+1)$ divise $\binom{2n}{n}$.

Exercice 5 [Calculs de pgcd]

Calculer les pgcds des couples d'entiers suivants :

1. $(94, 267)$;
2. $(106, 317)$;
3. $(82, 519)$;
4. $(9348, 1640)$.

Exercice 6 [Relation de Bézout]

Pour chaque couple suivant, montrer que les entiers considérés sont premiers entre eux et exhiber une relation de Bézout :

1. $(25, 38)$;
2. $(19, 54)$;
3. $(18, 29)$;
4. $(51, 148)$;
5. $(94, 205)$;
6. $(293, 107)$.

Exercice 7 [Couples d'entiers premiers entre eux]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les couples suivants sont constitués d'entiers premiers entre eux :

1. $(n! + 1, (n+1)! + 1)$;
2. $(3^{n+1} + 2^{n+1}, 3^n + 2^n)$.

Exercice 8 [Famille d'entiers deux-à-deux premiers entre eux]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, on pose : $a_i = i \cdot n! + 1$.
Montrer que les a_i sont deux-à-deux premiers entre eux.

Exercice 9 [Calculs modulaires]

Donner les restes des divisions euclidiennes de :

1. 2^{17} par 3 ;
2. 5^5 par 7 ;
3. 111970 par 9.

Exercice 10 [Racines de l'unité]

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{m \wedge n}$.

Exercice 11 [Un critère de double divisibilité]
Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Montrer que : $7|x$ et $7|y \Leftrightarrow 7|x^2 + y^2$.

Exercice 12 [Équations et calculs modulaires]

1. Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de n^3 par 7, pour $n \in \mathbb{Z}$.
2. En déduire les solutions entières de l'équation : $7x = 4y^3$.

Exercice 13 [Un autre critère de divisibilité]

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 10^n par 11.
2. En déduire un critère de divisibilité par 11 faisant intervenir les chiffres de l'écriture décimale.

Exercice 14 [Théorème de Wilson]
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ (non nécessairement premier a priori).

1. On suppose que $(p-1)! \equiv -1 \ [p]$: montrer que p est premier.
2. On suppose p premier.
   (a) Montrer que : $\forall x \in [\![1; p-1]\!],\ \exists! y \in [\![1; p-1]\!],\ xy \equiv 1 \ [p]$.
   (b) Résoudre l'équation $x^2 \equiv 1 \ [p]$ et en déduire que $(p-1)! \equiv -1 \ [p]$.
3. En déduire le **théorème de Wilson** : p est premier si, et seulement si, $(p-1)! \equiv -1 \ [p]$. Et préciser les valeurs possibles de $(p-1)! \ [p]$ si p n'est pas premier.

Exercice 15 [Pgcd et puissance]
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(a \wedge b)^n = (a^n) \wedge (b^n)$.
En déduire que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$: $a^n | b^n \Leftrightarrow a|b$.

Exercice 16 [Nombre et de diviseurs]
Notons $n = \prod_{i=1}^r p_i^{a_i}$ la décomposition de $n \in \mathbb{N}^*$ en produit de facteurs premiers.
Déterminer le nombre de diviseurs positifs de n ainsi que leur somme en fonction des p_i et des a_i.

Exercice 17 [Produit des diviseurs]
Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ qui sont égaux au produit de leurs diviseurs positifs non triviaux.

Exercice 18 [Puissances premières entre elles]
Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $a^m = b^n$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{N}^*$ tel que : $a = c^n$ et $b = c^m$.
Montrer que le résultat précédent est faux si n, m ne sont pas premiers entre eux.

Exercice 19 [Nombres de Fermat]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que, pour $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$, F_n et F_n sont premiers entre eux.

Exercice 20 [Nombre de zéros]
Déterminer le nombre de zéros dans l'écriture décimale de 100!.

Exercice 21 [Théorème de Kürschák]
Déterminer pour quels entiers $n \geqslant m \geqslant 1$ le nombre $H_{m,n} = \sum_{k=m}^n \dfrac{1}{k}$ est un entier (on pourra utiliser des valuations 2-adiques).