TP 4 : Intégration numérique

1 Convergence des méthodes d'approximation

Exercice 1. Convergence de méthodes.

Pour chacune des méthodes présentées en TD, créer une fonction qui prend en argument une fonction f, deux réels a et b (avec $a < b$) et un entier n, et rend l'approximation de l'intégrale associée.

En particulier, on vérifiera avec différents exemples que les majorations trouvées en TD sont bien vérifiées. On essaiera tant que possible de faire en sorte que la quantité $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, utilisée pour quantifier les erreurs, soit utilisée de manière exacte quand c'est possible.

2 Ordres des méthodes

Exercice 2. Ordres des méthodes.

Pour chacune des méthodes, tester avec des polynômes les plus généraux possibles les approximations d'intégrales, et en déduire l'ordre de ces méthodes.

Exercice 3. Méthode de Newton–Cotes

En utilisant Xcas, résoudre l'exercice suivant, présent sur la feuille de TD.

Soit f une fonction continue sur $[-1, 1]$. On considère $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On fait l'approximation : $\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

Dans les cas suivants, dire pour quelle valeurs des λ_i l'approximation est d'ordre le plus grand possible, et préciser cet ordre.

1. $n = 2$, $(x_1, x_2) = (-a, a)$, $a \in]0, 1]$;
2. $n = 2$, $(x_1, x_2) = (-1/2, 1)$;
3. $n = 3$, $(x_1, x_2, x_3) = (-a, 0, a)$, $a \in]0, 1]$;
4. $n = 3$, $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -1/2, 1/2)$;
5. $n = 4$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, -1/2, 1/2, 1/4)$.