Université Grenoble–Alpes **Mat406 2018/2019**

TP 3 : Approximation polynomiale

1 Polynômes de Lagrange

Exercice 1. Polynômes de Lagrange (1)

Écrire un algorithme qui, étant donnés une fonction f, un entier $n > 0$ et deux réels a, b avec $a < b$, donne le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points : $x_k = a + \frac{k\cdot(b-a)}{n}$, $k = 0, \dots, n$.

On pourra pour cela procéder de la manière suivante :

1. on écrit une fonction qui, étant donnés a, b, n comme ci-dessus, rend la liste des x_k ;
2. on écrit une seconde fonction qui, étant donnés la suite des x_k crée le vecteur des polynômes de Lagrange associés L_k ;
3. enfin on écrit le polynôme interpolateur P grâce à l'expression de P dans la base des L_k.

Exercice 2. Polynôme de Lagrange (2)

À la manière de l'exercice précédent, écrire une fonction qui, étant donnés une fonction f, une liste $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ avec $0 \leq \alpha_0 < \cdots < \alpha_n \leq 1$ et deux réels a, b avec $a < b$, donne le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points : $x_k = a + \alpha_k \cdot (b - a)$, $k = 0, \dots, n$.

Exercice 3. Phénomène de Runge

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{1+25\cdot x^2}$, et on note P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_k = -1 + \frac{k}{n}$, $k = -n, \dots, n$.

Tracer sur un même graphique la fonction f et le polynôme P_n sur $[-1, 1]$. On pourra utiliser le programme de l'exercice 1 pour calculer P_n. Que se passe-t-il quand n devient grand ?

On définit Q_n le polynôme d'interpolation obtenu avec les points : $\alpha_k = -\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$. Que se passe-t-il quand n devient grand ? Représenter graphiquement les α_k, et comparer leur répartition à une équirépartition de $[-1; 1]$. On pourra pour cela exprimer la proportion des a_k dans les intervalles de la forme $[x, x + 0.05]$, pour x de la forme $-1 + k/20$, $k = 0, \dots, 39$.

Exercice 4. Interpolation de Hermite

Écrire un algorithme qui, étant donnés une fonction f, un entier $n > 0$ et deux réels a, b avec $a < b$, donne le polynôme d'interpolation de Hermite (voir feuille de TD3) de f aux points : $x_k = a + \frac{k\cdot(b-a)}{n}$, $k = 0, \dots, n$.

On pourra pour cela adopter une démarche semblable à celle de l'exercice 1 (sur les polynômes d'interpolation de Lagrange).

2 Polynômes orthogonaux

Exercice 5. Orthonormalisation de Gram–Schmidt (1)

On se place sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ (en pratique, on considérera le produit scalaire $\langle P, Q\rangle_1 = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\mathrm{d}x$ ou $\langle P, Q\rangle_2 = \int_0^\infty e^{-x}P(x)Q(x)\mathrm{d}x$). On considère la famille libre $1, X, \ldots, X^n$.

Écrire un programme qui rend, suivant le processus d'orthonormalisation de Gram–Schmidt, la famille orthonormale associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ (que l'on appellera avec la commande `prod`, implémentée séparément) et à la famille $1, X, \ldots, X^n$. On pourra pour cela dans un premier temps chercher à calculer le projeté orthogonal d'un polynôme sur un espace vectoriel défini par une base orthonormal, puis re-normaliser le polynôme ainsi obtenu.

En particulier, vérifier que les produits scalaires $\langle\ ,\ \rangle_1$ et $\langle\ ,\ \rangle_2$ donnent respectivement les famille (P_n) (polynômes de Legendre) et (Q_n) (polynômes de Laguerre) définis par :

$$P_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right]\ ;$$

$$Q_n = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[e^{-x}x^n\right].$$

Exercice 6. Orthonormalisation de Gram–Schmidt (2)

Refaire l'exercice précédent avec le produit scalaire $\langle P, Q\rangle_3 = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

Que se passe-t-il ?

En effectuant le changement de variable $u = \arccos(x)$, montrer que l'on a :

$$\langle P, Q\rangle_3 = \int_0^\pi P(\cos(u))Q(\cos(u))\mathrm{d}u.$$

Réécrivez votre programme avec cette nouvelle expression de $\langle P, Q\rangle_3$. Vérifiez que, à un facteur de normalisation près, on obtient les polynômes de Tchebychev T_n, définis par :

$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}(x^2-1)^k x^{n-2k}.$$