TP 2 : Équations non linéaires

Complément Xcas

Xcas sait résoudre certaines équations de manière exacte, avec la commande `solve`. Si l'on n'a besoin que d'une solution approchée, on pourra utiliser plutôt la commande `fsolve` (qui a l'avantage d'être beaucoup plus rapide).

Certaines évaluation (liées à l'utilisation des commandes telles que `si`), ne peuvent pas toujours se faire. C'est par exemple le cas quand on demande un tracé d'une fonction faisant intervenir des évaluations. Auquel cas, on utilise plutôt les commandes `when` ou `piecewise`.

Enfin, la liste des diviseurs d'un entier est donnée par la commande `divisors`.

1 La méthode de dichotomie

Exercice 1. Méthode de dichotomie (1) Écrire un programme qui prend en argument deux réels a, b, une fonction f définie sur $[a, b]$, ainsi qu'un réel ε, et qui :

— si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe : rend un message d'erreur signifiant que la méthode de dichotomie ne devrait pas fonctionner ;

— si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés : construit la suite obtenue par méthode de dichotomie à partir de a et b, en s'arrêtant au premier terme d'image plus petite que ε (en valeur absolue), et rend ce terme ainsi que le nombre d'itérations qui ont été nécessaires à l'obtenir.

Tester votre programme avec la fonction $f(x) = x^2 - 2$ sur le segment $[1; 2]$.

Exercice 2. Méthode de dichotomie (2)

1. On considère f une fonction continue qui admet des limites (finies ou non) de signe opposés en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f s'annule en au moins un point.
2. Déduire de la question précédente qu'un polynôme à coefficients réels de degré impair possède une racine réelle. Montrer que ce n'est pas nécessairement le cas pour un polynôme de degré pair.
3. On suppose que f vérifie les hypothèses de la question 1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) \cdot f(-a) < 0$. Écrire un programme qui cherche un tel a sous la forme $a = 2^n, n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire un programme qui prend en argument une fonction continue f et un réel ε et qui :

— si f vérifie les hypothèses de la question 1 : cherche a et $-a$ dont les images sont de signes opposés, et leur applique la méthode de dichotomie jusqu'à obtenir un réel d'image plus petite que ϵ (en valeur absolue), et rend a, le terme obtenue par dichotomie, et le nombre d'itérations nécessaires pour y arriver.

— sinon : rend un message d'erreur signifiant que f n'a pas les bonnes limites en $\pm\infty$.

2 Méthodes itératives

Exercice 3. Théorème du point fixe On souhaite étudier la suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction contractante.

1. Montrer que la fonction $f_1(x) = \sqrt{2+x}$ réaliste un contraction de $\mathbb{R}_+$. Donner un intervalle sur lequel la fonction $f_2(x) = x^2$ réalise une contraction. Montrer que la fonction $f_3(x) = 2 \cdot \cos(x/3)$ est une contraction de $[0; 2]$ et donner son rapport de contraction.
2. Écrire un programme qui, étant donné une fonction f et une valeur u_0, calcule et représente les 10 premiers termes de la suite u_n. Quels sont les avantages et les inconvénients d'utiliser une valeur exacte ou approchée ?
3. On veut savoir si la suite u_n a l'air de converger. Pour cela, on cherche à savoir si la quantité $|u_n - u_{n+1}|$ tend vers 0, et ce suffisamment vite. Écrire un programme qui, étant donné la fonction f, la valeur u_0, un entier N et un réel ε, calcule les termes de la suite u_n, jusqu'à ce que : le nombre de terme dépasse N, ou $|u_n - u_{n+1}| < \varepsilon$. Le programme rend alors la séquence (u_N, N) dans le premier cas, et u_{n+1} dans le second. Tester ce programme avec $f = f_1$ ou f_2.
4. On note k de rapport de contraction de la fonction f, et l son unique point fixe. Rappelez le lien entre les quantités $|u_{n+1} - u_n|$ et $|u_n - l|$. En déduire l'écriture d'un programme qui, étant donné f, u_0, k et ε calcule les termes de la suite jusqu'au premier terme vérifiant $|u_n - l| \leq \varepsilon$. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'unique point fixe de la fonction f_3.

Exercice 4. Points fixes instables. On veut résoudre l'équation

$$e^u - 2 = u \ , \ u > 0 \tag{1}$$

par la méthode du point fixe.

— La fonction $f(u) = e^u - 2$ est-elle contractante sur $[0, \infty[$? Tracer sur le graphe de f les premières valeurs de la suite itérée $u_n = f^n(u_0)$ pour une valeur initiale $u_0 > 0$. La suite converge-t-elle ?
En considérant la fonction réciproque f^{-1}, trouver une méthode de point fixe pour résoudre (1) numériquement.
Justifier la convergence et donner une majoration théorique de l'erreur.

Donner la solution approchée et le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une précision de 10^{-6} en prenant $u_0 = 1$.

— Utiliser la même méthode pour résoudre numériquement l'équation

$$\tan(u) = u \ , \ \pi/2 < u < 3\pi/2 \ .$$

— étant donnée une fonction non contractante quelconque $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, sous quelles conditions sur f votre méthode est-elle applicable ?

Exercice 5. Problèmes de convergence ? (1) Soit $g(u) = \arctan(u)$. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite itérée obtenue en appliquant la méthode de Newton à l'équation $g(r) = 0$ en partant de x_0.

1. Déterminer numériquement une valeur $a > 0$ telle que si $x_0 = a$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oscille entre les deux valeurs $\pm a$ de part et d'autre de la solution exacte $r = 0$.
   Indication : On pourra par exemple chercher a par une méthode de point fixe sur un intervalle bien choisi.
2. Déterminer *graphiquement* le comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quant $n \to \infty$ pour $|x_0| < a$ et pour $|x_0| > a$.

Exercice 6. Problèmes de convergence ? (2) On considère la fonction $f(x) = \sin(3x)$, dont on veut déterminer les racines par la méthode de Newton. On souhaite montrer qu'il existe des valeurs initiales x_0 telles que la méthode de Newton ne converge pas vers une racine de f. Pour cela, on procède de la manière suivante :

— on écrit explicitement la fonction g telle que la suite donnée par la méthode de Newton vérifie $x_{n+1} = g(x_n)$;

— on en déduit l'écriture de la fonction h telle que : $x_{n+2} = h(x_n)$;

— on montre que l'équation $h(x) = x$ possède une solution α telle que $f(\alpha) \neq 0$; on donnera une valeur approchée à 10^{-10} d'un tel α, en utilisant par exemple une méthode de dichotomie.

— on montre que la condition initiale $x_0 = \alpha$ donne une suite qui oscille entre deux valeurs, et qu'aucune de ces valeurs n'est une racine de f.

Exercice 7. Éstimation de π.

1. Soit $\alpha > 0$, exprimer $\arctan(-\alpha)$ et $\arctan(1/\alpha)$ en fonction de $\arctan(\alpha)$. En déduire que le calcul de $\arctan(\alpha)$ sur $\mathbb{R}$ peut se ramener au calcul de $\arctan(\alpha)$ sur $[0,1]$.
2. Soit donc $\alpha \in [0,1]$, montrer que
$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{\alpha^7}{7} \leq \arctan(\alpha) \leq \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} \ .$$
3. Déduire de la question précédente que la méthode de Newton appliquée à l'équation $\tan(x) - \alpha = 0, -\pi/2 < x < \pi/2$ avec comme valeur initiale $x_0 = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5}$ est une suite décroissante qui converge vers $\arctan(\alpha)$. Déterminez de cette manière une valeur approchée à 10^{-8} près de $\pi = 4\arctan(1)$.

Exercice 8. Comparaison entre la méthode de Newton et celle du point fixe.

1. Donner une suite itérative obtenue par la méthode de Newton convergeant vers $\sqrt{7}$.
2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par
$$f(x) = \frac{7x-7}{x-7}$$
admet $\sqrt{7}$ comme point fixe, et trouver un intervalle contenant $\sqrt{7}$ sur lequel la fonction f réalise une contraction.
3. En effectuant des calculs par valeurs approchés (à 200 chiffres significatifs par exemple), regarder la vitesse de convergence des 10 premiers termes des suites associées aux deux méthodes ci-dessus (en évaluant la différence entre deux termes successifs).
4. En déduire un encadrement à 10^{-6} près de $\sqrt{7}$ grâce à au programme de l'exercice **Théorème du point fixe** (on prendra comme valeur de départ pour initier nos suites une valeur approchée sous forme de flottant avec la commande `evalf`, puis un entier pour avoir une valeur approchée sous forme de fraction). Dire dans chaque cas combien d'itérations sont nécessaires.

Exercice 9. Cas des fonctions non contractantes On s'intéresse à la solution de l'équation $\tan(x) = x$ sur $[3\pi/2; 5\pi/2]$.

1. En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto (\tan(x) - x)$, justifier que la solution de l'équation $\tan(x) = x$ sur $[3\pi/2; 5\pi/2]$ existe et est unique.
2. La fonction tan est-elle contractante ? La fonction arctan est-elle contractante ?
3. À l'aide de la fonction arctan, donner une équation de la forme $f(x) = x$ sur un intervalle bien choisi, ayant même solution que l'équation $\tan(x) = x$ sur $[3\pi/2; 5\pi/2]$, pour f une fonction contractante.
4. En déduire une estimation à 10^{-6} près de la solution de l'équation $\tan(x) = x$ sur $[3\pi/2; 5\pi/2]$.

Exercice 10. Méthode de la sécante. Donner un programme qui, étant donné une fonction f, un réel ε un entier n et deux réels a, b applique la méthode de la sécante à la fonction f avec comme point de départ $x_0 = a, x_1 = b$, jusqu'à trouver un x tel que $f(x) \leq \varepsilon$ ou jusqu'à atteindre n itérations.

Tester le programme avec la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \log(-x) - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \text{x} & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \log(x) + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

En particulier, regarder ce qu'il se passe pour différentes valeurs de a et b (on pourra en particulier voir ce qu'il se passe pour a, b grands, puis pour a, b proches de 0).

3 Polynômes

Exercice 11. Racines rationnelles de polynômes. Écrire un programme qui, étant donné un polynôme à coefficients rationnel, cherche toutes les racines rationnelles de ce polynôme. On pourra procéder de la manière suivante :

1. réécrire le polynôme initial P, sans en changer ses racines ni leurs multiplicités, pour que tous ses coefficients soient entiers et les plus petits possible ; on note Q le polynôme ainsi obtenu ;
2. diviser Q par x^n, où n est la multiplicité de 0 comme racine de P (donc de Q) ; on note R le polynôme ainsi obtenu ;
3. calculer les diviseurs (avec la commande `divisors`) des coefficients de R de plus haut et plus petit degré, et en déduire la liste l des racines rationnelles non nulles possibles pour R (donc pour P) ;
4. calculer les multiplicités des racines cherchées, et rendre la liste des couples (α, n_α), où α est une racine rationnelle non nulle de P, et n_α sa multiplicité.

Exercice 12. Méthode de Budan–Fourier. On se donne un polynôme P un polynômes à coefficients réels. Donner une méthode qui donne un encadrement à ε près des racines de P suivant la méthode de Budan–Fourier. Pour cela :

1. calculer toutes les dérivées successives de P ;
2. en déduire une fonction V_P qui, à un x donné, rend le nombre de changements de signes dans la suite $(P(x), P'(x), \ldots, P^{(n)}(x))$;
3. procéder par dichotomie pour encadrer les racines réelles de P (on pourra utiliser le théorème de Cauchy pour avoir un premier encadrement des racines réelles possibles).

La fonction finale rendra une liste de couples de la forme $(n, [\alpha; \beta])$, où n est le nombre maximal de racines de P dans $[\alpha; \beta]$ (calculé à l'aide de la fonction V_P), et $[\alpha, \beta]$ est de longueur au plus ε.

Exercice 13. Méthode de Sturm. On se donne un polynôme P un polynômes à coefficients réels. Donner une méthode qui donne un encadrement à ε près des racines de P suivant la méthode de Sturm. On pourra utiliser une méthode proche de l'exercice précédent, à la différence près que les nombres n obtenus en sortie seront exactement les nombres de racines sur les intervalles $[\alpha; \beta]$.