Université Grenoble–Alpes **Mat406 2018/2019**

TP 1 : Nombres et erreurs

Complément Xcas

Afin de mieux voir certains comportements, il sera parfois utile de représenter graphiquement certaines quantités. Par exemple, on pourra représenter sur un graphe les termes d'une suite, ou tracer une fonction, ce qui se fait avec la commande `plot` :

- pour une suite : on représente par la liste l les termes d'une suite qu'on veut représenter. Il suffit d'exécuter la commande : `plot([seq(j,j=1..nops(l))],l)`. De manière plus générale, on peut tracer les segments reliant les points de coordonnées (l_i, k_i), pour l, k deux listes, avec la commande `plot(l,k)`.
- pour une fonction : pour tracer la fonction f entre les valeurs a et b, on exécute la commande : `plot(f(x),x=a..b)`. On peut omettre la plage sur laquelle on fait le tracé, auquel cas Xcas se charge de trouver un intervalle qu'il estime probant.

Pour avoir le maximum ou le minimum d'une expression, on peut utiliser les commandes `fMax` ou `fMin`. Par exemple, étant donnée $f(x)$ une expression, la commande `fMax(f(x),x)` rend la valeur de x en laquelle l'expression $f(x)$ est maximale (et on peut évaluer l'expression, ou utiliser la commande `limit`).

1 Représentation des nombres

Exercice 1. Entiers en base p. Donner un algorithme qui, étant donné un entier n, donne la plus petite puissance de p qui est inférieure ou égale à n, et évaluer sa complexité. En déduire un programme qui donne, pour un entier n, le nombre de chiffres de son développement en base p ainsi que ce même développement.

Exercice 2. Approximation de réels en base p.

- Écrire un programme qui, étant donné une liste l, rend le rationnel entre 0 et 1 dont l'écriture en base p est donnée par l.
- Écrire un programme qui, étant donné un réel x (que l'on pourra supposer dans $[0; 1]$ pour simplifier) et un entier n, donne son développement en base p à n chiffres après la virgule (sous forme d'une liste).
- Observer ce qu'il se passe quand on fait grandir n et expliquer. On pourra s'intéresser au plus petit entier n tel que la commande `(1.0+p^(-n)) -1.0` renvoie `0`.

Exercice 3. Entiers et non-entiers Calculer la valeur de $a = \exp(\pi\sqrt{163})$ avec 30 chiffres significatifs. Calculer sa partie fractionnaire (avec la commande `frac`) puis proposer une commande permettant "en général" de décider si un nombre est entier ou non.

Exercice 4. Méthode de Horner. Calculer la complexité de la méthode de Horner pour calculer la valeur d'un polynôme en un point (voir feuille de TD 1). Comparer à une méthode "bête" qui consisterait à calculer les quantités $a_i\alpha^i$ comme un produit de $(i+1)$ termes, puis de sommer tous les termes obtenus. On pourra écrire deux programmes (un pour chaque version du calcul) et comparer les temps de calculs.

2 Erreurs

Exercice 5. Erreur induites par un choix d'écriture Comparer les valeurs de

$$\sqrt{10^{11}+1}-\sqrt{10^{11}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{10^{11}+1}+\sqrt{10^{11}}}$$

en calcul exact et en calcul approché. En calcul approché, laquelle de ces deux valeurs vous parait-elle plus proche de la valeur exacte correspondante ?

Exercice 6. Erreurs sur des fractions rationnelles Déterminer la valeur et le signe de la fraction rationnelle

$$F(x,y)=\frac{1335}{4}y^6+x^2(11x^2y^2-y^6-121y^4-2)+\frac{11}{2}y^8+\frac{x}{2y}$$

en $(x,y)=(77617,33096)$ de manière exacte et de manière approchée. Combien de chiffres significatifs sont nécessaire pour avoir le bon signe de $F(x,y)$?

3 Séries et développements limités

Exercice 7. Approximation de la fonction cos

- Rappeler le développement limité de Taylor $T_{2n+1}(x)$ à l'ordre $2n+1$ de la fonction $\sin(x)$ au voisinage de 0.
- Tracer sur un même graphique les fonctions T_1, T_3, T_5, T_7.
- Donner une majoration du reste $R_{2n+1}(x)=\sin(x)-T_{2n+1}(x)$ en fonction de x.
- On se restreint à l'intervalle $[-1;1]$. Donner une majoration, indépendante de x, de la quantité $R_{2n+1}(x)$ en fonction de n, et vérifier ce résultat avec la commande `fMax`.
- En déduire la valeur minimum de n pour que T_{2n+1} approxime la fonction sin sur $[0;1]$ à 10^{-6} près.
- Donner la valeur minimum sur n pour que la fonction $T_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ soit une approximation de la fonction $\cos(x)$ sur $[0;1]$ à 10^{-6} près. Que devient l'incertitude sur $[0;\pi/4]$ (on pourra se contenter de l'inégalité $0\leq\pi\leq 3.15$).
- Construire sur $[-100;100]$ la fonction f qui approxime la fonction cos à 10^{-6} près, et dont l'image en x est déterminé de la manière suivante :
  1. on cherche un élément de $[-\pi/2;\pi/2]$ qui diffère de x d'un multiple de π de x (on pourra utiliser la commande `round` pour avoir un arrondi de x/π), et on se ramène à $x\in[-\pi/2;\pi/2]$;

2. en utilisant les relations entre $\cos(x)$ et $\cos(-x)$, on se ramène à $x \in [0; \pi/2]$;
3. selon où l'on est dans $[0; \pi/2]$, on procède comme suit :
   — si $x \leq \pi/4$ on utilise l'approximation précédente de $\cos(x)$;
   — si $x \geq \pi/4$ on utilise que $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$ et on utilise l'approximation précédente de $\sin(x)$.

— Tracer sur $[-10; 10]$ la fonction $f - \cos$ pour vérifier qu'il n'y aurait pas d'erreur.

Exercice 8. Calcul approché d'intégrale

1. Écrire le développement en sériens entières au voisinage de $x = 0$ de la fonction :
$$g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}.$$
2. À l'aide de la question précédente, écrire l'intégrale $I = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ sous forme d'une série $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$.
3. Donner une majoration du reste de la série $R_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} v_j$.
4. Écrire un encadrement de I en fonction des sommes $S_n = \sum_{j=0}^{n} v_j$. Donner explicitement cet encadrement lorsque $n = 10$, et en déduire une valeur de I à 10^{-6} près.