Feuille de TD n°1

Exercice 4 :
On se donne $x = a/b$ une fraction écrite sous forme irréductible, et on s'intéresse à son développement en base p.

On voit facilement que les entiers s'écrivent de manière finie en base p (conséquence de la division euclidienne). Il est tout aussi immédiat que, étant donné deux nombres α, β (entiers ou non) qui s'écrivent de manière finie en base p, leur produit $\alpha \cdot \beta$ s'écrit aussi de manière finie en base p. Il suffit de donner leur écriture comme une combinaison linéaire en les puissances de p pour le constater.

Montrons déjà que le problème ne dépend pas du choix de a. Pour cela, on montre l'équivalence suivante :

a/b s'écrit de manière finie en base $p \Leftrightarrow 1/b$ s'écrit de manière finie en base p.

- $\Rightarrow$: on utilise le théorème de Bézout (comme a et b sont premiers entre eux). On possède $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$, c'est-à-dire que : $1/b = (a/b) \cdot u + v$. Si a/b a une écriture finie, alors $(a/b) \cdot u$ aussi, donc $1/b$ aussi.
- $\Leftarrow$: si $1/b$ a une écriture finie, alors $a/b = a \cdot 1/b$ aussi.

On s'est donc ramené à savoir si $1/b$ a une écriture finie en base p.

Si $1/b$ a une écriture finie en base p : on écrit directement :

$$\frac{1}{b} = \sum_{i=0}^{N} \frac{b_i}{p^i}$$

où les b_i sont des entiers compris entre 0 et $p-1$. Le fait que les indices qui apparaissent sont tous positifs vient du fait que $1/b \leq 1$.
En multipliant tout par p^N, on obtient que :

$$\frac{p^N}{b} = \sum_{i=0}^{N} b_i \cdot p^{N-i}$$

est un entier, c'est-à-dire que b divise une puissance de p (à savoir p^N).

Si b divise une puissance de p : on pose N tel que b divise p^N. Le nombre p^N/b est entier, et possède donc une écriture finie en base p :

$$\frac{p^N}{b} = \sum_{j=0}^{M} b_j \cdot p^j$$

et finalement le nombre $1/b$ possède l'écriture finie en base p :

$$\frac{1}{b} = \sum_{j=0}^{M} \frac{b_j}{p^{N-j}}.$$