TD 4 : Intégration numérique

1 Convergence des méthodes d'approximation

Exercice 1. Méthode des rectangles à gauche ou à droite.

On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Décrire la méthode d'approximation d'intégrale par les rectangles à gauche ou à droite.
2. Montrer que, pour tous $x, y \in [a, b]$ avec $x \leq y$, on a :
$$\int_x^y |f(t) - f(x)| \mathrm{d}t \leq \sup_{t \in [x,y]} |f'(t)| \cdot \frac{(x-y)^2}{2}.$$
3. On suppose que l'on fait l'approximation de l'intégrale de f par des rectangles de largeur h. Majorer l'écart entre l'intégrale de f et son approximation en fonction de h, $b - a$ et $\sup_{t \in [a,b]} |f'(t)|$.
4. Avec la majoration précédente, en déduire la largeur maximale des rectangles (et donc leur nombre minimal) pour calculer l'intégrale de $t \mapsto e^{-t^2/2}$ sur $[0, 1]$ à 10^{-8} près.
5. On suppose que f' est décroissante et de signe constant. Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$ et $h > 0$ tels que les quantités ci-dessous soient bien définies, on a :
$$\forall y \in [x, x+h], \int_{x-h}^{x} f(t) \mathrm{d}t \leq h \cdot f'(x) \leq h \cdot f'(y) \leq h \cdot f'(x+h) \leq \int_x^{x+h} f'(t) \mathrm{d}t.$$
6. En déduire une nouvelle majoration de l'écart entre l'intégrale de f et son approximation par la méthode des rectangles qui ne fasse pas intervenir f'.
7. Comparer les deux majorations dans le cas de la fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ sur $[0, 1]$.

Exercice 2. Méthode des rectangles médians

On considère f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. On approxime l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par la quantité :
$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{2n} \cdot (2k+1)\right).$$

1. Montrer que, pour tous $x, y \in [a, b]$ avec $x \leq y$, on a :
$$\int_x^y \left| f(t) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \mathrm{d}t \leq \sup_{t \in [x,y]} |f''(t)| \cdot \frac{(x-y)^3}{24}.$$

   On pourra pour cela utiliser la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2.

2. On suppose que l'on fait l'approximation de l'intégrale de f par des rectangles médians de largeur h. Exprimer h en fonction de $(b-a)$ et n, puis majorer l'écart entre l'intégrale de f et son approximation en fonction de h, $b-a$ et $\sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.

Exercice 3. Méthode des trapèzes.

On considère f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. On approxime l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par la quantité :

$$I_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)+f\left(a+\frac{b-a}{n}(k+1)\right)\right).$$

1. Montrer que, pour tous $x, y \in [a,b]$ avec $x \leq y$, on a :

$$\int_x^y \left(f(t)-\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)\right)\mathrm{d}t = \int_x^y \frac{(t-x)(t-y)}{2}f''(t)\mathrm{d}t.$$

   On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour cela (ou faire des intégrations par parties).

2. En déduire que, pour tous $x, y \in [a,b]$ avec $x \leq y$, on a :

$$\int_x^y \left|f(t)-\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)\right|\mathrm{d}t \leq \sup_{t\in[x,y]}|f''(t)|\cdot\frac{(x-y)^3}{12}.$$

3. On suppose que l'on fait l'approximation de l'intégrale de f par des rectangles médians de largeur h. Exprimer h en fonction de $(b-a)$ et n, puis majorer l'écart entre l'intégrale de f et son approximation en fonction de h, $b-a$ et $\sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.

Exercice 4. Méthode de Simpson.

On considère f de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[-1,1]$. On pose P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f pour les points $-1, 0, 1$.

1. Exprimer $P(x)$ en fonction de $f(-1), f(0), f(1)$.
2. En déduire l'intégrale de P sur $[-1;1]$ en fonction de $f(-1), f(0), f(1)$.
3. On rappelle que, si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un segment $[a,b]$, le polynôme d'interpolation P aux points $x_0, \ldots, x_n$ vérifie :

$$\forall x\in[a,b],\ \exists\xi\in]a,b[,\ f(x)-P(x)=\frac{1}{(n+1)!}\left(\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right)f^{(n+1)}(\xi).$$

   Exprimer cette égalité dans le cas particulier de l'exercice.

4. En déduire une majoration de la quantité $\left|\int_{-1}^1 (f(x)-P(x))\mathrm{d}x\right|$ en fonction de $\sup_{t\in[-1,1]}|f'''(t)|$.

5. On suppose désormais que f est de classe $\mathcal{C}^4$. Donner le développement de Taylor de f au voisinage de 0.
6. En déduire une majoration de la quantité $\left|\int_{-1}^{1}(f(x)-P(x))\mathrm{d}x\right|$ en fonction de $\sup_{t\in[-1,1]} |f''''(t)|$.

2 Ordres des méthodes

Exercice 5. Méthode des rectangles.

Dans les différentes méthodes de rectangles (à gauche, à droite et médians), étudier l'ordre des approximations d'intégrales. Plus précisément, si l'on note p l'ordre de l'approximation, montrez que :

1. pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à p, la méthode d'approximation est exacte ;
2. il existe un polynôme de degré $(p+1)$ pour lequel la méthode n'est pas exacte.

On rappelle pour cela que les méthodes des rectangles à gauche et à droite sont d'ordre 0, tandis que les méthodes des rectangles médians est d'ordre 1.

Exercice 6. Méthode des trapèzes.

On considère la méthode des trapèze présentées ci-dessus.

1. En utilisant la majoration donnée pour la méthode des trapèzes, montrer que la méthode des trapèzes est au moins d'ordre 1.
2. Effectuer la méthode des trapèzes sur une fonction convexe et en déduire qu'elle n'est pas d'ordre 2.

Exercice 7. Méthode de Simpson.

Suivant la même méthode, montrer que la méthode de Simpson est d'ordre 3.

Exercice 8. Méthode de Newton–Cotes

Soit f une fonction continue sur $[-1,1]$. On considère $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On fait l'approximation : $\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Dans les cas suivants, dire pour quelle valeurs des λ_k l'approximation est d'ordre le plus grand possible, et préciser cet ordre.

1. $n=2$, $(x_1,x_2)=(-a,a)$, $a\in]0,1]$;
2. $n=2$, $(x_1,x_2)=(-1/2,1)$;
3. $n=3$, $(x_1,x_2,x_3)=(-a,0,a)$, $a\in]0,1]$;
4. $n=3$, $(x_1,x_2,x_3)=(-1,-1/2,1/2)$;
5. $n=4$, $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-1,-1/2,1/2,1/4)$.