Université Grenoble–Alpes **Mat406 2018/2019**

TD 3 : Approximation polynomiale

1 Polynômes de Lagrange

Exercice 1. Forme de Newton

On considère des points $M_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ pour $i = 0, \ldots, n$, avec $x_0 < \cdots < x_n$. On rappelle l'écriture des polynômes de Lagrange associés aux x_i :

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

1. Montrer que le polynôme $P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(X)$ est l'unique polynôme de degré n vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i = 0, \ldots, n$. On appellera P_n le polynôme interpolateur de $(M_0, \ldots, M_n)$.
2. Montrer que l'on peut exprimer P_n de manière unique sous la forme suivante (appelée forme de Newton) :
$$P_n(X) = y_0 + y_{0,1}(X - x_0) + \cdots + y_{0,1,\ldots,n} \prod_{j=0}^{n-1} (X - x_j).$$
3. Montrer que :
$$y_{0,1,\ldots,n} = \frac{y_{1,2,\ldots,n} - y_{0,1,\ldots,n-1}}{x_n - x_0}$$
où $y_{1,2,\ldots,n}$ est le coefficient dominant de Q_{n-1} et $y_{0,1,\ldots,n-1}$ est le coefficient dominant de P_{n-1}, avec P_{n-1} et Q_{n-1} les polynômes interpolateurs de $(M_0, \ldots, M_{n-1})$ et de $(M_1, \ldots, M_n)$ respectivement. On pourra pour cela commencer par montrer l'égalité : $P_n(X) = \frac{X - x_n}{x_0 - x_n} P_{n-1}(X) + \frac{X - x_0}{x_n - x_0} Q_{n-1}(X)$.
4. Quel avantage a la forme de Newton sur la forme de Lagrange ?

Exercice 2. Développement de Taylor et polynôme de Lagrange

On considère la fonction $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0; 2]$, que l'on souhaite approximer par un polynôme de degré 2. On note T_2 le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f et L_2 le polynôme de Lagrange de f associés aux points $0, 1, 2$.

1. Calculer T_2.
2. On pose $L_2(x) = ax^2 + bx + c$. Exprimez un système vérifié par a, b, c.
3. En déduire que : $L_2(x) = 1 + (e - 1) + \frac{e^2 - 2e + 1}{2} x(x - 1)$.
4. Comparer les graphes de f, T_2 et L_2, et en déduire graphiquement la meilleure approximation de f entre L_2 et T_2 (on pourra utiliser la commande `fMax` et faire des calculs approchés pour comparer ces quantités).

5. A-t-on le même résultat en remplaçant T_2 par le développement limité à l'ordre 2 de f en 1 ?

Exercice 3. Interpolation de Hermite

Le principe de l'interpolation de Hermite est que, pour une fonction f et des points distincts $x_1, \ldots, x_n$ donnés, on cherche un polynôme de degré minimal qui a même valeur et même dérivée que f en les x_i.

On se donne donc une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, on fixe $x_1, \ldots, x_n$ des points distincts, et on note pour simplifier $y_i = f(x_i)$ et $d_i = f'(x_i)$.

1. Pour $i = 1, \ldots, n$, on pose $Q_i(x) = \prod_{j \neq i}(x - x_j)^2$. Calculer $Q_i(x_j)$ et $Q_i'(x_j)$ pour tout i, j.
2. On considère le polynôme :
$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i(X)}{Q_i(x_i)} \left[\left(1 - (X - x_i) \frac{Q_i'(x_i)}{Q_i(x_i)} \right) y_i + (X - x_i) d_i \right].$$
Calculer $P(x_i)$ et $P'(x_i)$ pour tout i.
3. Majorer le degré de P (de manière inconditionnelle par rapport aux y_i et d_i).
4. En déduire que P est l'unique polynôme de degré minimal ayant même valeur et dérivée que f en les x_i. On pourra voir que, si un polynôme vérifie cette condition et est de degré inférieur ou égal à celui de P, alors il est nécessairement égal à P.

2 Polynômes orthogonaux

Exercice 4. Polynômes de Tchebychev

1. Montrer que, étant donné un entier naturel n, il existe un polynôme T_n tel que $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour tout x. On pourra utiliser les formules de Moivre, qui donnent une expression explicite de T_n en fonction de n.
2. Montrer que le choix de T_n est unique.
3. Donner le degré ainsi que le coefficient des T_n, et en déduire qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}[X]$.
4. Exprimez $\cos((n+1)x)$ et $\cos((n-1)x)$ en fonction de $\cos(nx), \cos(x), \sin(nx), \sin(x)$, et une expression de T_{n+1} en fonction de T_n et T_{n-1}.
5. Vérifier que la forme $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$ est bien un produit scalaire sur l'espace des polynômes.
6. À l'aide du changement de variable $u = \arccos(x)$, montrer que l'on a l'égalité : $\langle P, Q \rangle = \int_{0}^{\pi} P(\cos(u)) Q(\cos(u)) \mathrm{d}u$.

7. Montrer que la famille des T_n est orthogonale pour le produit scalaire précédent. Et calculer la norme de chaque T_n (pour la norme associée à ce produit scalaire). On pourra pour cela commencer par démontrer la formule suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

8. Justifier que, à des scalaires près, la famille T_n est celle obtenue par orthonormalisation de Gram–Schmidt de la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
9. Calculer la quantité : $\|T_n\|_\infty = \max\limits_{x\in[-1;1]} |T_n(x)|$.
10. Montrer que, pour $n \geq 1$, le polynôme $\frac{1}{2^{n-1}}$ est le polynôme unitaire de degré n qui réalise la meilleure approximation uniforme de la fonction nulle sur $[-1;1]$, c'est-à-dire que tout polynôme unitaire P de degré n vérifie : $\|\frac{1}{2^{n-1}}T_n\|_\infty \leq \|P\|_\infty$. Pour cela on pourra supposer par l'absurde que P vérifie $\|\frac{1}{2^{n-1}}T_n\|_\infty > \|P\|_\infty$, puis considérer le polynôme $\frac{1}{2^{n-1}}T_n - P$, dont on majore le degré et dont on montre qu'il possède des racines sur chaque intervalle de la forme $]\cos(k\pi/n); \cos((k+1)\pi/n[$ (pour $k = 0, \dots, n-1$).
11. Montrer que le polynôme $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ est le seul à réaliser cette approximation. On pourra pour cela considérer un autre polynôme, et étudier le polynôme d'interpolation de Lagrange de leur différence aux points $\cos(k\pi/n)$, $k = 0, \dots, n$, dont on étudiera le signe et la somme des coefficients dans la base "classique" des polynômes de Lagrange.