TD 1 : Nombres et erreurs

1 Représentation des nombres

Exercice 1. Entiers en base 2 et en base 16.
- Soit n_1 l'entier s'écrivant 1234 en base 16. Donner n_1 en base 10.
- Soit n_2 l'entier s'écrivant 6000 en base 10. écrire n_2 en base 16 puis en base 2.

Exercice 2. Opérations en base 2. Donner les tables d'addition et de multiplication en base 2. Calculer la somme, la différence et le produit des 2 entiers s'écrivant 1101 et 1011 en base 2 en utilisant l'algorithme “école primaire” en base 2. Vérifiez vos résultats en les comparant à ceux obtenus en base 10.

Exercice 3. Fractions en base 2. Écrire les nombres décimaux 0.25, 0.1875 et 0.3 en base 2. Comment ces nombres sont-ils codés sur un ordinateur disposant de 52 bit pour la mantisse et de 11 bit pour l'exposant ? Le codage est-il exact ? Que donne le calcul de $0.3 - 3 * 0.1$ effectué avec Xcas ? Expliquer.

Exercice 4. Fraction en base p. Étant donné un nombre rationnel $x = a/b$ (écrit sous forme irréductible), montrer que x a une écriture finie en base p si, et seulement si, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que b divise p^n. On pourra montrer, grâce au théorème de Bézout, que l'on peut supposer que $a = 1$. Vérifier le résultat obtenu pour la base 10, avec les nombres décimaux (qui ont des développement limités en base 10) ou avec les fractions 1/3 ou 1/7 (qui ont des développement illimités en base 10).

Exercice 5. Développement en base quelconque On fixe $p \geq 2$ un entier. Étant donné $x \in \mathbb{R}_+$, on définit $q(x)$ et $r(x)$ comme respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de x par p (c'est-à-dire que $q(x)$ est le plus grand entier positif tel que $q(x) \cdot p \leq x$, et $r(x) = x - q(x) \cdot p$).

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & x \\ u_{n+1} & = & p \cdot r(u_n) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad v_n = q(u_n)$$

- Donner la relation liant u_n, u_{n+1} et v_n. En déduire que l'on a l'égalité pour tout n :

$$x = \left(\sum_{i=0}^{n} v_i \cdot p^{1-i} \right) + \frac{u_{n+1}}{p^{n+1}}.$$

- Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a : $0 \leq u_n < p^2$ et $0 \leq v_n < p$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\sum_{i=0}^{n} v_i \cdot p^{1-i}$ converge, et donner sa limite.

— Réciproquement, on suppose que l'on possède une suite w_n d'entiers positifs tels que $0 \leq w_n < p$ dès que $n \geq 1$. Montrer que la suite $W_n = \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot p^{1-i}$ est convergente.
— On suppose que l'on a deux suite w, w' comme ci-dessus. Et on suppose de plus que les termes w_n et w'_n ne sont pas tous égaux à $p-1$ à partir d'un certain rang. Montrer que les limites des suites W_n et W'_n associées sont égales si, et seulement si, les suites w_n et w'_n sont les mêmes. On pourra pour cela chercher à majorer les restes $R_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} w_i \cdot p^{1-i}$.

Exercice 6. Méthode de Horner (1). Il s'agit d'évaluer efficacement un polynôme en un point. On note $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, on pose $b_0 = P(\alpha)$ et on écrit :

$$P(X) - b_0 = (X - \alpha)Q(X)$$

où :

$$Q(X) = b_n X^{n-1} + ... + b_2 X + b_1 \ .$$

On calcule alors par ordre décroissant b_n, b_{n-1}, ..., b_0.
— Donner b_n en fonction de a_n puis b_i en fonction de a_i et b_{i+1} pour $i = n-1, n-2, \ldots, 0$.
— Appliquer la méthode ci-dessus pour calculer $P(\alpha)$ pour $P(X) = X^3 + 7X^2 + 7X$ et $\alpha = 16$.
— Même question pour $P(X) = X^5 + 4X^4 + 3X^3$ et $\alpha = 5$. En déduire l'écriture en base 10 de l'entier s'écrivant 143000 en base 5.

Exercice 7. Méthode de Horner (2). Pour calculer tous les coefficients du développement de Taylor du polynôme $P(X)$ en un point, on pose $P_0(X) = P(X)$ et on répète l'algorithme de l'exercice précèdent pour calculer successivement les coefficients des polynômes $P_0(X), P_1(X), \ldots, P_n(X)$ définis par :

$$\begin{array}{rcl} P_0(X) & = & (X-\alpha)P_1(X) + P_0(\alpha) \\ P_1(X) & = & (X-\alpha)P_2(X) + P_1(\alpha) \\ & \ldots & \\ P_{n-1}(X) & = & (X-\alpha)P_n(X) + P_{n-1}(\alpha) \end{array}$$

jusqu'à ce que l'on obtienne un polynôme de degré zéro, $P_n(X) = const$.
— Montrer que

$$P(X) = (X-\alpha)^n P_n(\alpha) + (X-\alpha)^{n-1} P_{n-1}(\alpha) + \cdots (X-\alpha) P_1(\alpha) + P_0(\alpha) \ .$$

Comment sont reliés $P_i(\alpha)$ et la i-ième dérivée $P^{[i]}(\alpha)$ de P au point α ?
— Utiliser cette méthode pour calculer $P^{[i]}(\alpha)$, $i = 0, 1, 2, 3$, pour $P(X) = X^3 - 2X + 5$ et $\alpha = 39$.

2 Erreurs

Exercice 8. Erreur relative pour l'inverse. Donner l'erreur relative de $1/x$ par rapport à $1/x_0$ en fonction de l'erreur relative $\epsilon = |x - x_0|/|x_0|$ de x par rapport à x_0 (on pourra se limiter au plus bas ordre en ϵ).

Exercice 9. Erreur relative pour la racine carrée. On souhaite savoir avec quelle précision on calcule la racine carrée de 2. Pour cela, on fait la méthode naïve suivante : on donne une estimée, on la met au carré, et on compare le résultat obtenu avec 2.

On suppose pour simplifier que les multiplications sont des opérations exactes (et en particulier, l'élévation au carré est une opération exacte). On suppose que α est une estimation de $\sqrt{2}$ telle que : $|\alpha^2 - 2| \leq \varepsilon$. Quelle majoration peut-on faire de la quantité $|\alpha - \sqrt{2}|$ (on pourra commencer par chercher un segment ne contenant pas 0 mais contenant $\sqrt{2}$, et supposer qu'il contient aussi α).

Exercice 10. Répercussion d'erreurs. On considère la suite définie par $x_n = a^n$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$. Selon que ε désigne l'erreur relative ou l'erreur absolue associée à l'écriture de a, donner la précision avec laquelle x_n est connu.

Exercice 11. Fonctions lipschitziennes On dit qu'une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est *lipschitzienne* s'il existe $k > 0$ tel que pour tous $x, y \in [a, b] : |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$. Montrer qu'une telle fonction est uniformément continue (et donc continue).

Étant donné x une approximation de $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $|f(\alpha) - f(x)| \leq \varepsilon$. Quelle majoration peut-on faire sur la quantité $|x - \alpha|$? Retrouver le résultat de l'exercice précédent.

3 Séries et développements limités

Exercice 12. Séries entières. Donner les développements en séries entières des fonctions suivantes, ainsi que leurs rayons de convergence :

— $f_1(x) = \cos(x)$
— $f_2(x) = \sin(x)$
— $f_3(x) = (1 + x^2)^{-1}$
— $f_4(x) = \arctan(x)$ (Indication : intégrer termes à termes le développement de $f_3(x)$)
— $f_5(x) = (1 + x)^{-1/2}$.

Exercice 13. Calcul de l'exponentielle.

On veut calculer e^8 avec une précision relative de 2^{-52}. Si on utilise une somme partielle de la série $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, combien de termes doit-on prendre ? Qu'en est-il si on calcule plutôt $((e^2)^2)^2$?

Exercice 14. Racine quatrième. Donner le développement de Taylor de $(1 + x)^{1/4}$ en $x = 0$ à l'ordre n sous forme d'un polynôme $T_n(x)$ de degré n et d'un reste $R_n(x)$.
Donner une majoration du reste $R_n(x)$ pour $n = 4$ et $x = 1/2$, en déduire un encadrement

de $(3/2)^{1/4}$.
Déterminer une valeur de n pour que $T_n(x)$ soit une valeur approchée de $(1+x)^{1/4}$ à 10^{-5} près pour tout $x \in [0, 1/2]$.

Exercice 15. Approximation de π

- Soit $\alpha > 0$, exprimer $\arctan(-\alpha)$ et $\arctan(1/\alpha)$ en fonction de $\arctan(\alpha)$. En déduire que le calcul de $\arctan(\alpha)$ sur $\mathbb{R}$ peut se ramener au calcul de $\arctan(\alpha)$ sur $[0, 1]$.
- En utilisant le développement limité de $\arctan(x)$ en 0, donner jusqu'à quel rang il faut calculer le développement limité de $\arctan(1)$ pour obtenir une estimation de $\pi/4$ à 10^{-8} près.
- Comparer la méthode précédente si l'on utilisait plutôt le développement limité de $\arctan(1/\sqrt{3})$.
- Montrer la formule de Machin : $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ (on pourra utiliser la formule d'addition $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\cdot\tan(b)}$). Jusqu'à quel ordre est-il nécessaire de calculer le développement limité avec cette formule ?

Exercice 16. Fonction de Bessel. On veut calculer une valeur approchée de

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-ix\cos(t))\ dt$$

pour $x \in \mathbb{C}, |x| \leq 1$.

- En intégrant termes à termes le développement en série entière au voisinage de $x = 0$ de $\exp(-ix\cos(t))$, déterminer la série entière de $J_0(x)$ en $x = 0$,

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ .$$

- Montrer que $a_n = 0$ si n est impair.
- Soit $n \geq 2$. Montrer que $a_n = -a_{n-2}/n^2$.
  Indication : On pourra utiliser

$$\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n dt = \int_0^{2\pi} (\cos(t))^{n-2} dt - \int_0^{2\pi} (\cos(t))^{n-2} \sin(t) \sin(t)\, dt$$

  puis intégrer par parties la seconde intégrale.
- Montrer que $a_n = (-1)^p/(2^p p!)^2$ si $n = 2p$ est pair.
- Donner une majoration de la valeur absolue du reste

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$$

  pour $x \in \mathbb{C}, |x| \leq 1$. Déterminer une valeur approchée de $J_0(1)$ et de $J_0(i)$ à 10^{-8} près.