Exercice 1.

1. Résoudre l'équation différentielle suivante
$$x' = x + \cos(t)\ ;\ x(0) = 1.$$
2. Tracer la solution et étudier son comportement en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 2. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle
$$(E) \qquad x - tx' = \frac{2t}{t+2}.$$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes et discuter le comportement asymtotique des solutions pour $t \to +\infty$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$)
$$a) \quad x' = \lambda x, \quad b) \quad x' = \lambda x + \cos(t), \quad c) \quad x' = at^n x,$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'espace vectoriel des polynômes $V = \mathbb{R}_n[t]$ de degré $\leq n$.

1. Montrer que l'application $L : V \to V$, $P \mapsto P' - P$ définit une bijection de V dans V. Déterminer l'application réciproque L^{-1}.
2. Soit P un polynôme. Déterminer une primitive de $f(t) = P(t)e^{-t}$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles à variables séparées :
$$(2t + 3)x' + tx = 0, \quad x(0) = 1$$
$$(e^t + 1)x' + e^t x^2 = 0, \quad x(0) = 2$$
$$y'(\tan(y)^2 + 1) = \tan(y), \quad y(0) = 5\pi/4$$

Exercice 6.

1. La désintégration de 50 % de matière radioactive s'est produite dans 30 jours. Dans combien de temps restera-t-il 1 % de toute la quantité initiale ?
2. Selon les expériences, la désintégration annuelle du radium est de l'ordre de 0.44 mg par gramme. En combien d'années la moitié de toute la réserve de radium se désintègrera-t-elle ?

Exercice 7.

1. Résoudre l'équation différentielle $x' = (x - a)(x - b)$ sur $\mathbb{R}$ où $a > b$ sont des constantes. Discuter le comportement des solutions lorsque $t \to +\infty$.
2. Résoudre l'équation différentielle $x' = x^2 + a^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre l'équation différentielle $x' = x^2 - 10x + 9$ sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $x(0) = 3$. Discuter le comportement des solutions lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 8. On considère les deux équations différentielles dépendant de deux paramètres réels a et b
$$\begin{array}{ll} (E_1) & x' = ax + b \\ (E_2) & x' = ax + bx^2. \end{array}$$
Pour chacune d'elles

1. Déterminer les solutions stationnaires.
2. Résoudre l'équation analytiquement et donner l'allure des solutions.
3. Discuter le comportement des solutions lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles
$$a)\ x'' + 3x' + 2x = 0 \quad b)\ x'' + 2x' + 2x = 0 \quad c)\ x'' + 2x' + x = 0$$
Discuter le comportement des solutions lorsque $t \to +\infty$. Mêmes questions en ajoutant au second membre $\cos(t)$.

Exercice 10 *(janvier 2015).

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle
$$x'' + 4x = \cos(2t)$$
Les solutions sont-elles bornées lorsque $t \to +\infty$?
2. Soit $a \in]0, 4[$. Donner la solution générale de l'équation différentielle
$$x'' + ax' + 4x = \cos(2t) \quad (E)$$
3. Déterminer la solution de (E) pour les conditions initiales $x(0) = 0, x'(0) = 1/a$.
4. Déterminer le maximum M_a de cette solution pour $t \geq 0$ en fonction de a.
5. Quelle est la limite de M_a lorsque a tend vers 0 ?
Ce résultat est-il encore valide lorsqu'on fixe des conditions initiales indépendantes de a (on pourra discuter le comportement des solutions de $x'' + ax' + 4x = 0$ lorsque $t \to +\infty$) ?

Exercice 11 (juin 2016, circuit RLC). On s'intéresse à l'équation différentielle
$$\frac{q}{C} + Rq' + Lq'' = U\cos(\omega t) \tag{1}$$
où $R \geq 0, L > 0, C > 0, U \geq 0, \omega > 0$ sont des constantes, t le temps, $q(t)$ la fonction inconnue (la charge du condensateur du circuit RLC), $q' = \frac{dq}{dt}, q'' = \frac{d^2q}{dt^2}$

1. Quel est l'ordre de cette équation ? Est-elle linéaire ? À variables séparables ?
2. On suppose dans cette question que $R = 0$ et $U = 0$, on pose $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Donner la solution générale de l'équation (1). La solution est-elle bornée lorsque $t \to +\infty$?
3. On suppose dans cette question que $R = 0$ et $U = 1$. Donner la solution générale de l'équation (1) et indiquer si la solution est bornée lorsque $t \to +\infty$. On distinguera les cas $\omega_0 \neq \omega$ et $\omega_0 = \omega$.
4. On suppose dans la suite que $R > 0$. Montrer que les racines de l'équation $\frac{1}{C} + Rx + Lx^2 = 0$ d'inconnue x sont deux réels strictement négatifs ou deux complexes conjugués de partie réelle strictement négative. En déduire la solution générale de l'équation (1) lorsque $U = 0$ et déterminer sa limite lorsque $t \to +\infty$.
5. On suppose toujours que $R > 0$ mais maintenant $U \neq 0$. Déterminer une solution particulière de la forme $q(t) = Qe^{i\omega t}, (Q \in \mathbb{C}, i^2 = -1)$ pour l'équation
$$\frac{q}{C} + Rq' + Lq'' = Ue^{i\omega t} \qquad (*)$$
Calculer $q' = Ie^{i\omega t}, I \in \mathbb{C}$ et en déduire une relation entre I et U (loi d'Ohm complexe).
6. En déduire une solution particulière de (1) en prenant la partie réelle de la solution trouvée pour (*). Comparer les solutions de (1) avec cette solution particulière lorsque $t \to +\infty$. Peut-on négliger la condition initiale $q(t_0), q'(t_0)$ lorsque $t \to +\infty$?
7. Quel serait le comportement asymptotique des solutions si R était strictement négatif ?

Exercice 12.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$; $x(0) = a, \ y(0) = b$.
3. Tracer la courbe paramétrée $t \to (x(t), y(t))$ pour $a = 1$ et $b = 0$.
4. Discuter le comportement des solutions du 2. lorsque $t \to +\infty$

5. Trouver une solution particulière de $\begin{cases} x' = -2x - y + \cos(t) \\ y' = -x - 2y + \sin(t) \end{cases}$;

6. Discuter le comportement des solutions du 5. lorsque $t \to +\infty$

Exercice 13.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$; $x(0) = a,\ y(0) = b$.

3. Tracer la courbe paramétrée $t \to (x(t), y(t))$ pour $a = 4$ et $b = 0$.

Exercice 14.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$; $x(0) = a,\ y(0) = b$.

3. Tracer la courbe paramétrée $t \to (x(t), y(t))$ pour $a = 1$ et $b = 1$.

Exercice 15 (juin 2015).

1. On cherche à déterminer la solution générale du système différentiel

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} Y, \quad Y(t) = (x(t), y(t))$$

Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont la première composante $x(t)$ de $Y(t)$ est solution

En déduire la solution générale du système. Tracer le graphe de la courbe paramétrique $(x(t), y(t)) = Y(t)$ de la solution telle que $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les solutions sont-elles bornées lorsque $t \to +\infty$?

2. Vérifier que $Y(t) = e^{2it}(\frac{-it}{4} + \frac{1}{8}, \frac{t}{2})$ est solution particulière du système :

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2it} \end{pmatrix}$$

Déterminer la solution générale du système différentiel

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Les solutions sont-elles bornées lorsque $t \to +\infty$?

3. Soit $a \in]0, 4[$. On considère le système différentiel

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -a \end{pmatrix} Y$$

Déterminer le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice du système et en déduire la limite des solutions lorsque $t \to +\infty$

4. Pour $a \in]0, 4[$, on considère le système différentiel

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -a \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Les solutions sont-elles bornées lorsque $t \to +\infty$? (on ne demande pas de calculer explicitement les solutions).

Exercice 16. On considère l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $I =]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$(E) \;\; x''(t) + 3\tan(t)x'(t) - 2x(t) = 0.$$

1. Quelle est la nature de l'espace des solutions ?
2. Vérifier que la fonction $x_0(t) = \sin(t)$ est solution de (E).
3. Soit x une solution, on pose $x = x_0 y$ pour $\sin(t) \neq 0$. Déterminer une équation d'ordre 1 vérifiée par y.
4. Résoudre (E).

Exercice 17*. (*Intégrales premières.*)
On considère un système différentiel du type

$$(S) \left\{ \begin{array}{c} x_1' = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots \\ x_n' = f_n(x_1, \ldots, x_n). \end{array} \right.$$

Ici chaque fonction f_i est définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle intégrale première du systeme une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1, constante sur chaque solution.

1. En dérivant $F(x_1, ..., x_n)$ le long d'une courbe intégrale, montrer que :
$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$
2. Soit A est une matrice antisymétrique fixée de taille n, que vaut $Ax.x$? En déduire une intégrale première du système $x' = Ax$. Interprétation ?
3. Soit $\lambda \in \mathbb{Z}$. Montrer que le système
$$\left\{ \begin{array}{c} x_1' = x_1 \\ x_2' = \lambda x_2 \end{array} \right.$$
admet une intégrale première non constante si et seulement si $\lambda \leq 0$. Indication : résoudre le système.
4. On considère l'équation différentielle $x'' = g(x)$. En posant $x_1 = x$ et $x_2 = x'$, à quel système différentiel est-on ramené ?
Soit P telle que $P' = -g$. On pose $E_P(x_1, x_2) = P(x_1)$ (énergie potentielle) et $E_C(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2$ (énergie cinétique). Montrer que l'énergie totale $E = E_P + E_C$ est une intégrale première du système.
Exprimer E dans le cas où $g(x) = \sin(2x)$.

Exercice 18. Résoudre les systèmes et donner l'allure des solutions $t \to (x(t), y(t))$ (en particulier le comportement pour $t \to +\infty$) :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -2x(t) + e^t \\ y'(t) = -y(t) + \cos(3t) \\ x(1) = 1, y(1) = 2 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ x(1) = 1, y(1) = 2 \end{array} \right.$$

(pour (b), on pourra aussi utiliser la fonction complexe $z(t) = x(t) + iy(t)$)

$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -y(t) + \cos(t) \\ y'(t) = x(t) + t, x(1) = 1, y(1) = 2 \end{array} \right. \qquad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -5x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -5x(t) + 2y(t) + \cos(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) + \sin(t) \\ x(1) = 1, y(1) = 2 \end{array} \right. \qquad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -2x(t) \\ y'(t) = y(t) \\ x(1) = 1, y(1) = 2 \end{array} \right.$$

Exercice 19. Résoudre $x''' + x = 0$.

Exercice 20*. En effectuant un changement de variable $s = g(t)$ conduisant à une équation différentielle à coefficients constants, résoudre

$$(1 + t^2)x'' + tx' + k^2x = 0.$$

Ici k est un paramètre.

Exercice 21. On considère l'équation $x' = \sin(x)$. Trouver les solutions constantes. Montrer que toutes les solutions sont bornées.

Exercice 22. On considère dans $\mathbb{R}^2$ la forme différentielle

$$\omega \ = \ (1 - x^2y^2)dx - 2x^3ydy \ .$$

(a) La forme ω est-elle fermée ? exacte ?

(b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale de la forme ω du point $P_0 = (0, 0)$ au point $P_1 = (1, 1)$ le long de la courbe $y = ax + (1 - a)x^2$. Le résultat dépend-il du paramètre a ?

(c) Soit $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$\mu(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2y^2)^2} \ , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Vérifier que μ est un facteur intégrant pour la forme ω, c'est-à-dire que la nouvelle forme $\Omega = \mu\omega$ est exacte. Trouver une fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\Omega = dV$.

(d) Dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ les lignes de niveau de la fonction V.

(e) Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'(x) \ = \ \frac{1 - x^2y(x)^2}{2x^3y(x)}$$

vérifiant la condition initiale $y(2) = 1/2$.

Exercice 23. Soit le système $\quad (S) \begin{cases} x'(t) & = y^2(t) - 1 \\ y'(t) & = x^2(t) - 1 \end{cases}$

a) Déterminer les solutions stationnaires du système.

b) Montrer que $f(x, y) = (x^3 - y^3) - 3(x - y)$ est une intégrale première du mouvement.

c) Tracer les courbes solutions de condition initiale $x(0) = y(0) = 0$ et $x(0) = \sqrt{3}, y(0) = 0$.

Exercice 24 Donner le lagrangien pour un pendule et les équations d'Euler-Lagrange.

Exercice 25 On considère dans $\mathbb{R}^2$ un potentiel $V(r)$ ne dépendant que de r la distance au centre. Écrire les équations d'Euler-Lagrange pour le lagrangien de la mécanique classique $L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$, appliquer au cas d'un potentiel $V(r) = \mu/r$. Même question dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées sphériques.

Exercice 26 Calculer le hamiltonien H de la mécanique classique et de la relativité en coordonnées cartésienne. Même question en coordonnées polaires.

Exercice 26. Soit une courbe $\gamma(x) = (x, y(x))$ définie sur $[a, b]$ et vérifiant $y(x) > 0$. On note

$$L_h(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx$$

la longueur hyperbolique de γ. Soit les points $A = (a, 1)$ et $B = (b, 1)$. On cherche parmi les courbes γ allant de A à B ($\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$) celle de longueur hyperbolique minimum.

1. En appliquant l'équation d'Euler-Lagrange, montrer qu'une telle courbe satisfait l'équation différentielle
$$(E_c) \ y^2(1 + y'^2) = c^2$$
où c est une constante non nulle.
2. Résoudre (E_c). Quelle est la nature géométrique de la courbe minimisante ?

Pendule sur une cycloïde

(Extrait de l'examen de janvier 2015).
On s'intéresse à la cycloïde C d'équations paramétriques

$$x(\tau) = R(\tau + \sin(\tau)), \quad y(\tau) = R(1 - \cos(\tau))$$

On utilise τ comme paramètre pour ne pas confondre avec le temps t qui servira dans la partie 2. La partie 1 porte sur l'étude de la courbe paramétrique, la partie 2 porte sur l'étude du mouvement d'une masse sur cette courbe,

Partie 1 : Courbe paramétrique

1. Préciser les symétries de la courbe, montrer qu'on peut se ramener à une étude sur $[0, \pi]$.
2. Représenter l'arche de la cycloïde C pour $\tau \in [-\pi, \pi]$ lorsque $R = 1$, en indiquant sur la figure les points de paramètre $\tau = -\pi, 0, \pi$ et les directions des tangentes en ces points (on justifiera).
3. Calculer l'élément de longueur ds en fonction de $\tau \in [-\pi, \pi]$ ($R > 0$ quelconque) et le repère de Frénet.
4. On fixe l'origine de l'abscisse curviligne au point (0,0). Montrer que $s^2(\tau) = ky(\tau)$ sur l'arche de cycloïde $\tau \in]-\pi, \pi[$, k étant une constante à déterminer en fonction de R.

Partie 2 : Equations différentielles

On lache à l'instant $t = 0$ une masse m en un point de l'arche de cycloïde sans vitesse initiale, on néglige les frottements. On repère la masse par son abscisse curviligne s, sa vitesse est $v = ds/dt$ (t est le temps, différent de τ). Les questions 1 à 5 proposent trois méthodes différentes pour résoudre l'équation différentielle correspondante, une des méthodes suffit pour aborder les questions 6 et 7.

1. En utilisant que l'énergie totale $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$ est une intégrale première du mouvement, montrer que l'abscisse curviligne s vérifie :
$$(*) \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{g}{4R}s^2 = C$$
2. Dériver (*). En admettant que s n'est pas constant sauf si y est identiquement nul, en déduire une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par s et résoudre cette équation.
3. Bonus : montrer que s n'est pas constant sauf si y est identiquement nul en appliquant le principe fondamental de la dynamique (somme des forces=masse $\times$ accélération) et en observant que la force de réaction de la courbe est portée par la normale à la courbe.
4. Quel est le signe de C ? Résoudre directement (*) comme une équation différentielle à variables séparables (on pourra utiliser $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$) et retrouver le résultat précédent.
5. Établir que le lagrangien du système vaut
$$L(s, \dot{s}, t) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mg\frac{s^2}{8R}$$
Donner l'équation d'Euler-Lagrange correspondante et retrouver le résultat précédent.
6. Montrer que le mouvement est périodique, calculer la période du mouvement.
7. Si on lache simultanément deux masses en deux points de l'arche d'ordonnées y_1 et y_2 telles que $0 < y_1 < y_2 < 2R$, laquelle des deux masses arrivera au point $(0, 0)$ en premier ? (N.B. : on pourra supposer que les abscisses initiales vérifient $x_1 < 0 < x_2$ pour éviter une éventuelle collision !)