Exercice 0, rappels de géométrie analytique, complexes et trigonométrie

1. Déterminer la pente, le vecteur directeur et l'équation cartésienne de la tangente au graphe de $f(x) = x^2 - 1$ au point d'abscisse $x = 3$. Faire une représentation graphique.
2. Donner le vecteur directeur de la tangente au cercle de centre $C(-1, -2)$ et de rayon 5 passant par le point $(2, 2)$, puis une équation paramétrique de cette tangente, puis une équation cartésienne. Faire une figure.
3. Soit deux droites D et D' de pentes m et m'. Montrer que D et D' sont orthogonales si et seulement si $mm' = -1$.
4. Soit $A(-1, 0)$ et $B(1, 0)$. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 4$. Faire une figure.
5. Tracer le cercle C d'équation cartésienne $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$. Donner une équation $y = f(x)$ du demi-cercle tel que $y > 2$. Vérifier que la tangente calculée en voyant le demi-cercle comme un graphe de fonction est bien orthogonale au rayon.
6. Déterminer les images par la symétrie axiale d'axe d'équation $y = 2x$ de A, la droite AB et le cercle C définis ci-dessus.
7. On considère les graphes F de e^x et G de e^{-x}, soient M et N les points de F et G d'abscisses $a \in \mathbb{R}$, et D et D' les tangentes en M et N. Que peut-on dire de ces 2 droites ? Soient P et Q les intersections avec l'axe des abscisses, déterminer la longueur PQ.
8. Donner le module et l'argument de $1 + i, 3 - 4i, -1 + \sqrt{3}i$. Représenter les points du plan d'affixe $2e^{i\pi/4}, \sqrt{3}e^{i\pi/6}$ et donner leurs coordonnées.
9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes
$$z^2 + 2 = 0 \quad z^2 = 1 + i \quad z^2 + iz = 2 \quad z^2 + rz - \omega^2 = 0$$
10. Suite géométrique dans $\mathbb{C}$
Soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = qu_n$. Représentez les 10 premiers termes de la suite lorsque $q = 1 + i, i, (1 - i)/3$. Donner la représentation polaire de u_n en fonction de n et expliquez le graphique.
11. Calculer $\int_0^\pi \sqrt{\cos(2x) + 1}$
12. Linéariser $\sin(x)^4$ en utilisant $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$ puis en déterminer une primitive.
13. Résoudre l'équation $\cos(3x) - \cos(x) = \sqrt{2}$ en utilisant $\cos(3x) = \Re((e^{ix})^3)$
14. Représenter dans le plan complexe les points A et B d'affixe $1 + i$ et $2 - i$. Déterminer le lieu des points M équidistants de A et B. Déterminer le cercle de diamètre AB (affixe du centre et rayon).
15. Soit r la rotation de centre l'origine, et d'angle $\pi/6$. Calculer les images des vecteurs de base d'affixe 1 et i en utilisant les nombres complexes. En déduire la matrice de r dans la base canonique. Faire le même calcul pour la rotation inverse et vérifier que les deux matrices sont inverses.
Soit $M(x, y)$ dans la base canonique, déterminer les coordonnées (X, Y) de M dans la base image de la base canonique par r.

Exercice 1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $(1, 2)$ et perpendiculaire à la droite paramétrée $x(t) = x_0 + at$, $y(t) = y_0 + bt$. En donner une représentation paramétrique.
Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$ donnée par l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Donner une infinité de paramétrages différents de D.

Exercice 2. Soit $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-2}$. Déterminer le domaine de définition de f, des éventuelles symétries de la courbe, les asymptotes éventuelles, faire le tableau de variations de f, tracer la courbe et ses éléments remarquables.

Exercice 3. Montrer que le cercle défini comme la courbe paramétrée $t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t)$ n'est pas le graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de réels. Donner un intervalle en t de taille maximal où elle l'est et tracer l'arc de courbe correspondant.
Déterminer une équation paramétrique de l'image du cercle trigonométrique par l'affinité de base Ox, de direction Oy et rapport r (écrasement vertical du cercle), on obtient une ellipse. Pour avoir une branche

d'hyperbole changer les fonctions trigonométriques en fonctions trigonométriques hyperboliques. Tracer ces courbes pour $r = 0.5$. Donner une équation paramétrique de la parabole d'équation $x = y^2$ dans $\mathbb{R}^2$, la tracer.

Exercice 4 Soit la courbe plane Γ donnée par $f(t) = (x(t), y(t)) = (\frac{t^2}{1+t}, \frac{t^3}{1+t})$ où le paramètre t décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$. Déterminer les points singuliers de Γ et la tangente en ces points (bonus : déterminer la nature de ces points singuliers).

b) Etudier les branches infinies de Γ (il y a une asymptote).

c) Etudier la convexité de Γ (conseil : considérer les variations de $g(t) = y'(t)/x'(t)$).

d) Dresser un tableau de variation commun de $x(t)$ et $y(t)$.

e) Tracer la courbe Γ.

Exercice 5. Etude de L la courbe de Lissajous paramétrée par $x(t) = \sin t$ et $y(t) = \cos 3t$.

1. Donner les symétries qui permettent de réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$.
2. Dresser sur $[0, \pi/2]$ un tableau de variation commun de $x(t)$ et $y(t)$.
3. Déterminer la tangente en L en $t = \pi/4$.
4. A l'aide de tout ceci, tracer la courbe L.
5. Préciser le tracé en étudiant sur $[0, \pi/2]$ la convexité de L

Exercice 6. Etudier les branches infinies de la courbe plane définie par :

$$t \mapsto (\frac{t^2}{t-1}, \frac{t}{t^2-1})$$

Exercice 7. Soit la courbe plane paramétrée par $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y(t) = t - \frac{1}{t}$ pour $t > 0$. Montrer que, par changement de paramètre, cette courbe se transforme en $x(t) = 2\cosh(s)$, $y(t) = 2\sinh(s)$.

Exercice 8* : Soit la parabole P d'équation $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$. Déterminer le point d'intersection de la réflexion sur la parabole de rayons incidents verticaux dirigés vers le bas.

Exercice 9. Soit la courbe plane définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto (3t^2 - 2t^3, 5t^4 - 4t^5)$. Déterminer les points singuliers de cette courbe et la tangente en ces points. Bonus : déterminer la nature de ces points singuliers.

Exercice 10. Soit l'astroïde A paramétrée par $x(t) = \frac{1}{4}(3\cos t + \cos 3t)$, $y(t) = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)$

a) Déterminer les points singuliers de A et la tangente à l'astroïde en ces points.

b) Vérifier que la distance entre les points d'intersection de la tangente en un point régulier $M(t) \in A$ avec les axes est constante. En déduire une construction géométrique alternative de l'astroïde.

Exercice 11 Étude et tracé de la courbe plane d'équation polaire $r(\theta) = \cos 3\theta$.

Exercice 12. Etudier et tracer les courbes planes définies par :

1) $t \mapsto (\frac{t}{1+t^2}, \frac{2+t^3}{1+t^2})$,

2) $r(\theta) = 1 + \frac{1}{\theta - \pi/4}$

3) (Rosace à trois boucles) $r(\theta) = \sin(3\theta)$.

Exercice 13. Soit C un cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.

1. Déterminer une équation polaire de C.
2. Soit D une droite passant par l'origine qui coupe C en un point P. On construit sur D deux points M et N distincts tels que $d(P; M) = d(P; N) = a$, où a est un réel strictement positif fixé. Déterminer une équation polaire de l'ensemble Γ_a décrit par les points M et N si l'on varie D (*limaçons de Pascal*).
3. Étudier et tracer Γ_1.
4. Déterminer, lorsque a décrit $]0; \infty[$, l'ensemble des points des courbes Γ_a dont la tangente est verticale.