Développements limités usuels

Développements limités classiques en 0. ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7) \\
\mathrm{ch}\ x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\
\mathrm{sh}\ x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!} x^n + o(x^n)
\end{aligned}
$$

Formulaire de trigonométrie

Les formules encadrées sont à connaître par coeur, les autres doivent se retrouver très rapidement.

Relations fondamentales :

$$\boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1 \quad 1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}}$$

Formules d'addition :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Formules de duplication :

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a)-\sin^2(a)\\ &= 2\cos^2(a)-1\\ &= 1-2\sin^2(a)\\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a)\end{aligned}$$

$$\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Formules de linéarisation :

$$\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\cos(a)\sin(b)=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$

$$\sin(a)\sin(b)=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$

Transformations de sommes en produits :

$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Paramétrisation rationnelle du cercle :

Si $t=\tan\left(\frac{a}{2}\right)$, alors :

$$\cos(a)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin(a)=\frac{2t}{1+t^2} \quad \tan(a)=\frac{2t}{1-t^2}$$