Université Grenoble Alpes Année 2018-2019
Module MAT 307

Examen terminal du 10 Janvier 2018

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée. Calculatrices autorisées

Le barème est donné à titre indicatif.

Durée 2h

Exercice 1– [*8 points*] On considère la courbe polaire suivante :

$$r(\theta) = \frac{1}{1+\sqrt{2}\cos(\theta)}.$$

1. Étudier et tracer la courbe : domaine de définition, domaine d'étude, branches infinies (on donnera l'équation dans le repère orthonormé usuel du plan), tableau de variation, changement de convexité (*Indication : on pourra étudier le signe de* $\frac{1}{r} + (\frac{1}{r})''$) puis tracé (avec le sens de parcours).
2. Calculer et tracer le repère de Frénet et le cercle osculateur au point de paramètre $\theta = \pi/2$.
3. Donner une valeur approchée de la longueur de l'arc entre les paramètres $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

Exercice 2 (*Méthode de résolution d'une équation différentielle d'ordre deux à coefficient non constant*)–[*8 points*]

On considère sur $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$t^2x'' + tx' - x = 0 \qquad (H)$$

$$t^2x'' + tx' - x = t^2e^t \qquad (E)$$

1. *Equation homogène* (H)
   (a) Montrer que $t \mapsto t$ est une solution particulière de (H).
   (b) *Variation de la constante :* En cherchant une seconde solution de (H) sous la forme $x(t) = \lambda(t)t$, montrer que la fonction $y = \lambda'$ vérifie l'équation différentielle suivante
   $$y' + \frac{3}{t}y = 0 \qquad (E')$$
   (c) Donner une solution de (E'). Prendre une primitive de cette fonction et en déduire une solution de (H).
   (d) Donner l'ensemble des solutions de (H).
2. *Solution particulière : méthode des variations des constantes :* on considère x_p de la forme
   $$x_p(t) = \alpha(t)t + \frac{\beta(t)}{t}.$$
   (a) Donner une condition entre α' et β' pour que $x_p'(t) = \alpha(t) - \dfrac{\beta(t)}{t^2}$.
   (b) En supposant cette relation vérifiée, donner la condition sur α' et β' pour que x_p soit solution de l'équation (E).
   (c) De ces deux conditions, en déduire les expressions de α' et β', et donc de x_p.
   (Indication : une primitive de $P(t)e^{\delta t}$ *est de la forme* $Q(t)e^{\delta t}$*, où* $P, Q \in \mathbb{R}[X]$*)*
3. Donner l'ensemble des solutions de (E).

T.S.V.P

Exercice 3 – [*6 points*]

On étudie le mouvement d'un satellite (supposé ponctuel et de masse m) autour de la terre (supposée ponctuelle, immobile et de masse M). La trajectoire du satellite est décrite par une courbe paramétrée $t \mapsto S(t) = (x(t), y(t))$, où la terre est localisée à l'origine O. On considère le lagrangien de la mécanique classique :

$$L\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, t\Big) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y)$$

avec le potentiel de gravitation

$$V(x, y) = -\frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(où $G > 0$ est une constante réelle).

1. (a) En écrivant les équations d'Euler-Lagrange, démontrer que l'accélération $\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ est proportionnelle au vecteur $e_r = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire que la quantité $\sigma(t) = \det(\overrightarrow{OS}, \vec{v}) = x(t)y'(t) - x'(t)y(t)$ est constante (c'est à dire $\sigma'(t) = 0$). On notera C_0 cette constante.

   (c) Donner l'hamiltonien $H(t)$ associé à ce mouvement. En calculant $H'(t)$, retrouver que l'hamitonien est conservé.

2. *Pour la suite, nous n'utiliserons des questions précédentes que le résultat*

$$x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = C_0, \ \forall t.$$

   Comme sur le dessin ci-dessous, on suppose que la courbe décrite par S n'intersecte pas les segments $[0, S(t)[$ pour tout t. On suppose qu'à l'instant initial $S(0) = S_0 = (a, 0)$ (pour un certain $a > 0$) et que le satellite part dans le sens trigonométrique (c'est à dire $y(t) > 0$ pour $t \in]0, t_0[$, pour un certain $t_0 > 0$).

   (a) Soit $T \in]0, t_0[$ et $\gamma(T)$ le lacet (parcouru dans le sens trigonométrique) définit par le segment $[O, S(0)]$, puis la courbe entre les paramètre $t = 0$ et $t = T$, puis le segment $[S(T), O]$. Pour $\omega = xdy - ydx$, exprimer $\int_{\gamma(T)} \omega$ en fonction de C_0 et T.

   (b) En déduire la deuxième loi de Képler : "l'aire balayée par le satellite (c'est à dire l'aire situé à l'intérieur de $\gamma(T)$) est proportionnelle au temps T".