Feuille de TD n°1

Exercice 33 : On considère la forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$:

$$\omega = x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}x = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y. \tag{1}$$

1. La forme ω n'est pas fermée, puisque l'on a : $\partial_y M = -1 \neq 1 = \partial_x N$.

Comme une forme exacte est nécessairement fermée, on est déduit directement que ω n'est pas exacte.

2. On considère sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ la forme différentielle $\omega_\alpha = (x^2+y^2)^\alpha \omega = M_\alpha \mathrm{d}x + N_\alpha \mathrm{d}y$.

On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_y M_\alpha & = & -(x^2+y^2)^\alpha - 2\alpha y^2 (x^2+y^2)^{\alpha-1} \\ \partial_x N_\alpha & = & (x^2+y^2)^\alpha + 2\alpha x^2 (x^2+y^2)^{\alpha-1} \end{array} \right. .$$

La forme ω_α est fermée si, et seulement si : $\partial_y M_\alpha = \partial_x N_\alpha$. Ainsi, ω_α est fermée si, et seulement si, $\alpha = -1$.

3. On veut calculer l'intégrale curviligne de ω sur l'arc γ défini par :

$$x(t) = a\cos(t), \;\; y(t) = b\sin(t)$$

avec $t \in [0, 2\pi]$.

On a :

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left(M(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + N(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-y(t) \cdot x'(t) + x(t) \cdot y'(t) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left(ab \cdot \sin^2(t) + ab \cdot \cos^2(t) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} ab \cdot \mathrm{d}t = 2\pi ab. \end{aligned}$$

4. On note E le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimitée par γ (c'est-à-dire ici l'ellipse d'axes (Ox) et (Oy), de demi-longueurs associées a et b respectivement). Alors le théorème de Stokes nous dit que :

$$\int_\gamma \omega = \int \int_E \left(\partial_x N - \partial_y M \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Dans notre cas particulier, on a :

$$\int \int_E \left(\partial_x N - \partial_y M \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int \int_E \left(1 - (-1) \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 2\mathcal{A}(E)$$

où on désigne par $\mathcal{A}(E)$ l'aire de E. L'aire de l'ellipse est donc πab.

Une ellipse d'axes de demi-longueurs a et b peut être décrite comme l'image d'un cercle de rayon a par une affinité orthogonale de rapport b/a, on en déduit que la quantité $\mathcal{A}(E)$ vaut $\pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$, ce qui est cohérent avec le résultat précédent.

5. Le cercle C de centre $(0,0)$ et de rayon 1 peut être paramétré comme :

$$x(t) = \cos(t),\ \ y(t) = \sin(t)$$

avec $t \in [0, 2\pi]$.

Pour alléger les notations, on note : $\omega_1 = \omega(x^2+y^2)^{-1} = M_1 \mathrm{d}x + N_1 \mathrm{d}y$. (au lieu de $\omega_{-1}, M_{-1}, N_{-1}$, suivant les notations de la question 2.).

On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_C \omega_1 &= \int_0^{2\pi} \left(M_1(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + N_1(x(t),y(t)) \cdot y'(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-y(t) \cdot (x(t)^2+y(t)^2)^{-1} \cdot x'(t) + x(t) \cdot (x(t)^2+y(t)^2)^{-1} \cdot y'(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 1 \cdot \mathrm{d}t = 2\pi.
\end{aligned}$$

Donc la forme n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: en effet, si elle était exacte, l'intégrale devrait être nulle (intégrale d'une forme exacte sur un lacet fermé).

6. La forme ω_1 est fermée (d'après la question 2.). Comme ω_1 est définie en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on en déduit qu'elle est exacte (d'après le cours).

Posons V un potentiel dont ω_1 dérive. Il doit vérifier :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_x V &=& \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \partial_y V &=& \frac{x}{x^2+y^2} \end{array}\right. \tag{2}$$

c'est-à-dire qu'il doit exister deux fonctions f_1, f_2 définies sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} V(x,y) &=& -\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) + f_1(y) \\ V(x,y) &=& \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + f_2(x) \end{array}\right. \tag{3}$$

En réinjectant la seconde équation de (3) dans la première équation de (2), on déduit que f_2 doit vérifier : $f_2'(x) = 0$, c'est-à-dire que f_2 est constante.

Si on avait fait le choix d'injecter la première équation de (3) dans la seconde équation de (2), on aurait trouvé $f_1'(y) = 0$, ce qui revient au même. Pour s'en convaincre, on peut avoir recours que lemme 1 qui suit, et dont la démonstration n'est pas compliquée.

On vérifie facilement que $V(x,y) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$ convient (c'est-à-dire que ω_1 dérive bien de V ainsi défini).

Lemme 1 *La fonction* $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(1/x)$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *est constante, de valeur* $\pi/4$.

7. Comme ω_1 est exacte sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, alors l'intégrale sur un lacet fermé est nulle, et ce peu importe le lacet.