Partiel

23 octobre 2018. Durée 2h00.

Pour l'exercice 3 et le problème, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{R}_+^*$ *l'ensemble des nombres réels strictement positifs.*

Question de cours. Donner la formule du binôme de Newton.

Exercice 1. Soient P et Q des assertions. À l'aide d'une table de vérité, vérifier que l'équivalence

$$(\neg(P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow (P \wedge (\neg Q))$$

est une tautologie (c'est-à-dire toujours vraie).

Exercice 2. Dans cet exercice, f désigne une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour chacune des assertions suivantes, donner la propriété de f correspondant à l'assertion.

1. $\forall x, y \in \mathbf{R},\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$
2. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R},\ y = f(x).$
3. $\exists A \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) < A.$
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall y \in \mathbf{R},\ |y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$

Exercice 3. Démontrer l'assertion suivante

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

(on pourra faire une preuve par récurrence).

Problème. On considère la partie de $\mathbf{R}^2$ définie par

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = x^2 + 1 \text{ et } y \geqslant 0 \}.$$

1. Démontrer que Γ est le graphe d'une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dont on donnera le domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
2. (a) Démontrer l'assertion suivante :

   $$\forall (x, y) \in \Gamma, \quad y \geqslant 1.$$

   (b) En déduire que 1 est le minimum des valeurs de la fonction f.

3. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) des éléments de Γ
   (a) Démontrer que $y_1 + y_2 \neq 0$
   (b) Démontrer la relation :
$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.$$
4. Soit M un nombre réel strictement positif. À l'aide des questions 2 et 3 démontrer l'assertion :
$$\forall x, x' \in [-M, M] \cap \mathscr{D}_f, \quad |f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'|.$$
5. On admet que $3 < \pi < 3,9$. On suppose que x est un nombre réel tel que $|x - \pi| < 10^{-6}$. Majorer l'erreur commise en utilisant $f(x)$ comme valeur approchée de $f(\pi)$.
6. Démontrer, *en utilisant la définition d'une limite avec les* ε, que f est continue. (Indication : on pourra éventuellement commencer par vérifier que si $|x - a| < 1$, alors $x \in [-|a| - 1, |a| + 1]$, puis utiliser la question 4).
7. Donner une autre démonstration de la continuité de f utilisant des résultats du cours.
8. En utilisant la question 3(b), démontrer que f est dérivable en tout nombre réel $a \in \mathscr{D}_f$ et que
$$f'(a) = \frac{a}{f(a)}.$$