Langage mathématique

Exercices

1.1. Vrai ou faux. — On prendra soin de justifier soigneusement chacune des réponses données : il ne suffit pas d'avoir juste, il faut savoir pourquoi !

Vrai-Faux 1.1. Soit A, B, C trois assertions.

Indiquer quelle assertions sont toujours vraies :

1. ☒ $A \vee \neg A$.
2. ☐ $A \vee \neg B$.
3. ☒ $A \wedge (A \vee B) \iff A$.
4. ☒ $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \iff A$.
5. ☒ $\neg(\neg(A \vee B) \wedge \neg(B \vee C)) \iff A \vee B \vee C$.
6. ☐ $(A \vee B) \wedge (B \vee C) \implies (A \vee C)$.

Vrai-Faux 1.2. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

Indiquer parmi les conditions suivantes celles qui sont suffisantes pour impliquer l'inclusion $A \subset B$:

1. ☐ ${}^cA \subset {}^cB$.
2. ☒ ${}^cA \cup B = E$.
3. ☐ $B - A = \emptyset$.
4. ☒ $A \cap {}^cB = \emptyset$.
5. ☐ $A \cup C \ \subset \ B \cup C$.
6. ☒ $A \cup C \ \subset \ B \cap C$.
7. ☐ ${}^cA \cup B = B$.

Vrai-Faux 1.3. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. L'ensemble $((A \cup B) \cap C) \cup ((A \cap B) \cap {}^cC)$ est-il toujours ?

1. ☐ égal à E.
2. ☐ inclus dans $A \cap B$.
3. ☒ inclus dans $A \cup B$.
4. ☒ inclus dans $A \cup C$.
5. ☐ inclus dans $A \cap C$.
6. ☒ inclus dans $(A \cap C) \cup B$.
7. ☐ inclus dans $(A \cap {}^cC) \cup B$.
8. ☒ égal à $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.

Vrai-Faux 1.4. Parmi les ensembles d'entiers suivants, lesquels sont égaux au singleton $\{0\}$, lesquels sont différents et pourquoi ?

1. ☐ $\{ n \in \mathbf{N} \mid n \leqslant 1 \}$.
2. ☒ $\{ n \in \mathbf{N} \mid n < 1 \}$.
3. ☒ $\{ n \in \mathbf{N} \mid (n \leqslant 1) \wedge (2 \,|\, n) \}$.
4. ☐ $\{ n \in \mathbf{N} \mid 1 + n > 0 \}$.
5. ☒ $\{ n \in \mathbf{N} \mid 1 + n = 1 \}$.
6. ☒ $\{ n \in \mathbf{N} \mid \forall m \in \mathbf{N}\,,\ n \leqslant m \}$.
7. ☐ $\{ n \in \mathbf{N} \mid \forall m \in \mathbf{N}\,,\ n < m \}$.
8. ☐ $\{ n \in \mathbf{N} \mid \forall m \in \mathbf{N}\,,\ n \,|\, m \}$.
9. ☒ $\{ n \in \mathbf{N} \mid \forall m \in \mathbf{N}\,,\ m \,|\, n \}$.

Vrai-Faux 1.5. Soient E et F deux ensembles, f une application de E vers F. Soient A et A' deux sous-ensembles de E. Soient B et B' deux sous-ensembles de F. Quelles sont les assertions parmi les assertions suivantes qui sont toujours vraies ?

1. ☒ $(A \subset A') \implies (f(A) \subset f(A'))$.
2. ☒ $(B \subset B') \implies (f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B'))$.
3. ☒ $f(A \cup A') = (f(A) \cup f(A'))$.
4. ☒ $f^{-1}(B \cup B') = (f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'))$.
5. ☐ $f(A \cap A') = (f(A) \cap f(A'))$.
6. ☒ $f^{-1}(B \cap B') = (f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'))$.
7. ☐ $f^{-1}(f(A)) = A$.
8. ☐ $f(f^{-1}(B)) = B$.
9. ☒ $f(A \cap f^{-1}(B)) = (f(A) \cap B)$.
10. ☐ $f(A \cup f^{-1}(B)) = (f(A) \cup B)$.

1.2. Exercices

Exercice 1.1. Soit A et B deux assertions, l'assertion $A \oplus B$ (dire “A ou exclusif B”) est vraie si exactement l'une des deux assertions A et B est vraie.

1. Donner la table de vérité de $A \oplus B$ selon les vérités de A et B.
2. Démontrer l'équivalence $A \oplus B \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.
3. Démontrer de deux façons différentes l'équivalence $A \oplus B \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$.

Exercice 1.2. Pour chacune des assertions ci-dessous, dire quelles variables sont liées. Dire ensuite si l'assertion dépend d'un paramètre. Écrire chaque assertion en français. On dit qu'une assertion est *close* si elle ne dépend pas d'un paramètre. Dire pour chaque assertion close si elle est vraie ou fausse.

1. $x \geqslant y$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant 0$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
5. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{N}, x \geqslant y$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, x \geqslant y$.
8. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, (x \geqslant y \text{ et } (\forall z \in \mathbf{Z}, x \geqslant z \Rightarrow y \geqslant z))$.

Exercice 1.3. Dire si les assertions suivantes sont vraies

1. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$.
2. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$.

Exercice 1.4. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Ecrire en fonction de A, B, C les ensembles correspondant aux assertions suivantes.

1. x appartient aux trois.
2. x appartient au moins à l'un d'entre eux.
3. x appartient à deux d'entre eux au plus.
4. x appartient à l'un d'entre eux exactement.
5. x appartient à deux d'entre eux au moins.
6. x appartient à l'un d'entre eux au plus.

Exercice 1.5. Soit E un ensemble. Soient A et B deux sous-ensembles de E. On appelle :

- différence de B dans A et on note $A - B$ l'ensemble $A \cap {}^{c}B$,
- différence symétrique de A et B et on note $A \Delta B$ l'ensemble $(A - B) \cup (B - A)$.

1. Ecrire sous forme logique les propriétés « $x \in A - B$ » et « $x \in A \Delta B$ » à l'aide des propriétés « $x \in A$ » et « $x \in B$ ». Démontrer les égalités ensemblistes suivantes.

2. $A - \emptyset = A \Delta \emptyset = A$.
3. $A - A = A \Delta A = \emptyset$.
4. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
5. $(A \Delta B) \cup (A \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$.
6. Donner une représentation sous forme de diagramme de Venn de tous les ensembles définis dans cet exercice.

Exercice 1.6. Représenter les ensembles suivants :

1. $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$;
2. $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x + 3y > 1\}$;
3. $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;
4. $H - G$;
5. $F \cap H$.

Exercice 1.7. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Simplifier l'expression $(A \cap B \cap C) \cup ({}^{c}A \cap B \cap C) \cup {}^{c}B \cup \complement C$.
2. Démontrer que $(A \cap {}^{c}B) \cap \complement C = A \cap {}^{c}(B \cup C) = (A \cap \complement C) \cap {}^{c}B$.
3. Démontrer que $(A \cup B \subset \complement C) \wedge (A \cup C \subset B) \Longleftrightarrow (A \subset B) \wedge (C = \emptyset)$.

Exercice 1.8. Soit $E = \{0, 1\}^2$, $F = \{(0, 0), (1, 1)\}$ et $G = E - F$. Si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \in \mathbf{R}$, on définit $H_{a,b,c} = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid ax + by + c \geqq 0\}$.

Peut-on avoir $F \subset H_{a,b,c}$ et $G \subset \mathbf{R}^2 - H_{a,b,c}$?

Exercice 1.9. Parmi les parties suivantes de $\mathbf{R}^2$, dire lesquelles sont le graphe d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Lorsque l'ensemble est un graphe de fonction, donner son domaine de définition.

1. $\{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y + x + 1 = 0 \,\}$;
2. $\{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^3 = x \,\}$;
3. $\{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 + (x + 1)^2 = 1 \,\}$;
4. $\{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 + (x + 1)^2 = 1 \text{ et } y \geqslant 0 \,\}$.

Exercice 1.10. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
2. $f(x) = \sqrt{x - x^3}$
3. $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$
4. $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$

5. $f(x) = \sqrt{\sin(2x)}$

Exercice 1.11. Soient I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. f n'est pas une fonction constante.
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur.
5. La fonction f présente un minimum.
6. f prend des valeurs arbitrairement grandes.
7. f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 1.12. Pour chacune des affirmations suivantes, décrire en termes simples les applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient ces affirmations ?

1. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(y) = f(x)$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(y) = f(x)$.
3. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.
5. $\forall x \in \mathbf{R}, (x \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0)$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0)$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, (x > 0 \Rightarrow f(x) > 0)$.
8. $\forall x \in \mathbf{R}, (x = 0 \Rightarrow f(x) = 0)$.
9. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$.
10. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) \leqslant 0 \text{ ou } f(x) \geqslant 0)$.

Exercice 1.13. (D'après Lewis Caroll). Parmi les combattants d'une grande bataille, au moins 70% ont perdu un œil, au moins 75% une oreille, au moins 80% un bras, et au moins 85% une jambe. Quelle est la proportion minimale des combattants qui ont perdu les 4 ?

Exercice 1.14. Un centre de langue propose des cours d'Albanais, de Bantou et de Chinois. Sur 93 élèves, 54 étudient l'Albanais, 51 le Bantou ou le Chinois, 27 le Chinois mais pas le Bantou, 3 ni l'Albanais ni le Chinois, et 12 étudient les 3 langues.

1. Combien d'élèves étudient à la fois le Bantou et le Chinois ?
2. Combien d'élèves étudient l'Albanais ou le Bantou mais pas le Chinois ?

3. Combien d'élèves n'étudient ni le Bantou ni le Chinois ?
4. Combien d'élèves étudient une seule langue ?
5. Combien d'élèves étudient exactement deux langues ?

Exercice 1.15. On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, A l'ensemble des nombres pairs, et B l'ensemble des nombres premiers. Exprimer sous forme symbolique les phrases suivantes.

1. Tout nombre pair est divisible par 2.
2. Aucun nombre impair n'est divisible par 2.
3. Il n'existe pas de nombre premier pair distinct de 2.
4. Tout nombre premier distinct de 2 est impair.
5. Il existe un nombre pair qui divise tout nombre pair.
6. Tout nombre premier divise au moins un nombre pair

Exercice 1.16. Représenter sur un diagramme de Venn les ensembles suivants.

- Ensemble Q des quadrilatères.
- Ensemble T des trapèzes.
- Ensemble P des parallélogrammes.
- Ensemble R des rectangles.
- Ensemble L des losanges.
- Ensemble C des carrés.

Exprimer sous forme logique, puis ensembliste, les phrases suivantes.

1. Tout carré est un rectangle.
2. Tout rectangle qui est aussi un losange est un carré.
3. Il existe des parallélogrammes qui ne sont pas des rectangles.
4. Si un losange est un rectangle alors c'est un carré.
5. Une condition nécessaire pour qu'un trapèze soit un carré est que ce soit un rectangle.
6. Pour qu'un trapèze soit un rectangle il suffit que ce soit un carré.
7. Il existe des quadrilatères qui ne sont ni des rectangles, ni des losanges.
8. Il existe des parallélogrammes qui ne sont ni des rectangles, ni des losanges.

Exercice 1.17. Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle « fonction indicatrice de A » et on note $\mathbf{I}_A$ l'application de E vers $\{0, 1\}$ qui à $x \in E$ associe 1 si $x \in A$, 0 si $x \notin A$. Soient A et B deux sous-ensembles de E. Démontrer les assertions suivantes.

1. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{{}^cA}(x) = 1 - \mathbf{I}_A(x)$.
2. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{A\cap B}(x) = \min\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.
3. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{A\cup B}(x) = \max\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) - \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.

Exercice 1.18. Soient f et g les applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ f(n) = 2n \qquad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f,\ f \circ g,\ g \circ g,\ g \circ g \circ g$.

Exercice 1.19. Ecrire chacune des assertions suivantes comme une implication. Ecrire et démontrer sa contraposée.

1. Aucun nombre impair n'est la somme de deux nombres impairs.
2. Tout nombre premier strictement supérieur à 2 est impair.
3. Soient m et n deux entiers impairs tels que m divise $2n$. Alors m divise n.
4. Soient m et n deux entiers tels que m divise n. Alors m et $n+1$ sont premiers entre eux (ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1).
5. Si le produit de deux entiers strictement supérieurs à 1 est le carré d'un entier alors chacun des deux est le carré d'un entier ou bien ils ont un diviseur commun autre que 1.

Exercice 1.20. On considère le jeu des tours de Hanoï. On dispose de 3 tiges verticales . Sur la première tige sont rangés par ordre de taille croissant n anneaux. Le plus grand est en bas et le plus petit est en haut. Il s'agit d'amener cette tour sur la troisième tige en ne déplaçant qu'un anneau à la fois et en ne posant jamais un anneau sur un anneau de taille plus petite. L'objet de cet exercice est de calculer le nombre minimal de déplacements. On introduit donc la suite (u_n) où u_n donne le nombre minimal pour n anneaux.

On a donc $u_1 = 1$.
Expliquez pourquoi $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Prouver alors par récurrence que $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 1.21. (D'après *250 problèmes de théorie des nombres élémentaire*, de Waclaw Sierpinski) Le but de cet exercice est de démontrer par récurrence que pour tout entier n positif, le nombre $3^{3n+3} - 26n - 27$ est divisible par 169.

1. Vérifier que la propriété voulue est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
2. Démontrer (par récurrence ou en utilisant des congruences) que 13 divise $3^{3k} - 1$ pour tout k entier, et en déduire que 169 divise $26(3^{3k} - 1)$ pour tout k entier.

3. Démontrer l'hérédité de la propriété voulue, et conclure.

Exercice 1.22. En utilisant un raisonnement par *disjonction des cas* (ou *cas par cas*), montrer que

1. Soient a et b deux réels,
$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$
$$\min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$$
2. Montrer que quelque soit l'entier naturel $n \in \mathbf{N}$, 3 divise $n(n+1)(2n+1)$.
3. Trouver tous les réels x tels que $|x+1| = 3 - |3x-2|$.

Exercice 1.23. En utilisant un raisonnement direct, montrer que

1. Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable et paire, alors sa dérivée f' est impaire.
2. Pour tout élément $x > 0$ de $\mathbf{Q}$, il existe un entier $n > 0$ tel que $n > x$.

Exercice 1.24. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que

1. $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ n'est pas un rationnel.
2. Soit n un entier naturel non nul et $a_1, \ldots, a_n$, n réels de somme égale à 1. Alors un de ces réels est plus petit que $\frac{1}{n}$.

Exercice 1.25. En utilisant un raisonnement par analyse et synthèse, montrer que

1. Toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Soient A et B deux points distincts du plan.

   Déterminer l'ensemble des points M tels que l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ soit égal à $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

   On montrera que si M est un tel point et si I est le milieu de A, B, $MI^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$.
3. Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles et distinctes du plan orienté. Soit A un point du plan n'appartenant ni à D_1, ni à D_2. Construire un triangle équilatéral ABC tel que B appartient à D_1 et C appartient à D_2. Combien y a t-il de triangles possibles. (*On supposera qu'un tel triangle existe et on cherchera comment construire B ou C en utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$*)

Exercice 1.26. (D'après *Le livre qui rend fou*, de Raymond Smullyan) Un roi joueur désire laisser une chance à des condamnés. Il les amène devant un ensemble de portes derrière chacune desquelles se trouve un tigre ou une princesse. Sur les portes sont placardées des indications. Le prisonnier doit choisir une porte (on suppose que les prisonniers préfèrent les princesses aux tigres).

1. Pour le premier prisonnier il y deux portes. L'une des affiches dit la vérité, l'autre ment.

   Sur la première est écrit : "Il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre."

   Sur la seconde : "Il y a une princesse dans une cellule et il y a un tigre dans une cellule."

   Le prisonnier a-t-il intérêt à ouvrir une porte plutôt que l'autre, et si oui laquelle ?
2. Pour le second prisonnier, toujours deux portes. Cette fois par contre, soit les deux affiches disent la vérité, soit elles mentent toutes les deux.

   Sur la première : "Une au moins des deux cellules contient une princesse."

   Sur la seconde : "Il y a un tigre dans l'autre cellule."
3. Pour le troisième prisonnier, les règles sont les mêmes que pour le second.

   Première porte : "Il y a un tigre dans cette cellule ou il y a une princesse dans l'autre."

   Deuxième porte : "Il y a une princesse dans l'autre cellule."
4. Maintenant il y a trois portes, et le roi a placé une princesse et deux tigres exactement. De plus, seule une des trois affiches dit la vérité.

   Sur la première porte on lit : "Il y a un tigre ici."

   Sur la seconde : "Cette cellule contient une princesse."

   Sur la troisième : "Il y a un tigre dans la seconde ceullule."
5. Il y a toujours une princesse et deux tigres, mais maintenant l'affiche collée sur la porte de la princesse dit la vérité tandis qu'un au moins des deux autres est fausses.

   Première porte : "Il y a un tigre dans la deuxième cellule."

   Deuxième porte : "Il y a un tigre ici."

   Troisième porte : "La première cellule contient un tigre."

Les exercices marqués d'une astérisque peuvent demander un peu plus de réflexion.

Exercice 1.27*. Soit x, x', y et y' des éléments d'un ensemble.

1. Démontrer l'équivalence
$$\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x'\},\{x',y'\}\} \Leftrightarrow (x = x') \wedge (y = y').$$
2. Est-il légitime de définir le couple (x, y) par la relation $(x, y) = \{\{x\},\{x, y\}\}$?

Exercice 1.28.* Soient E et F des ensembles. Soit f une application de E dans F. Démontrer que f est bijective si et seulement s'il existe une application g de F vers E telle $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Limites de fonctions

Exercices

2.1. Vrai ou faux. —

Vrai-Faux 2.1. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ telle que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

Pouvez-vous en déduire que (donnez un contre-exemple si ce n'est pas toujours vrai et une preuve si cela est vrai)

1. ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(1-x) = 0$
2. ☒ $\lim\limits_{x\to 0} 1/f(x) = 1$
3. ☒ $\lim\limits_{x\to 1} 1 - 1/f(1-x) = 0$
4. ☒ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{f(\sqrt{x})} = 1$
5. ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(\cos(x)) = 0$
6. ☒ $\lim\limits_{x\to 0} 1/f(\sin(x)) = 1$
7. ☐ $\lim\limits_{x\to 1} f(1+x) = 0$
8. ☒ $\lim\limits_{x\to 1} f(x-1) = 1$
9. ☐ $\lim\limits_{x\to 1} f(x-1)^2 - 2f(1-x) = 0$

Vrai-Faux 2.2. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Discuter la validité des assertions suivantes :

1. ☒ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
2. ☒ $f\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$
3. ☐ $f\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$

4. ☐ $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$
5. ☒ $xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
6. ☒ $xf(|x|) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$
7. ☐ $\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$
8. ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Vrai-Faux 2.3. Soit f une fonction définie sur $]-1,1[$ et g une fonction définie sur $\mathbf{R}$. Est-il toujours vrai que ?

1. ☐ Si $\forall x \in\,]-1,1[,\ f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.
2. ☒ Si $\forall x \in\,]-1,1[,\ -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$
3. ☒ Si $\forall x \in\,]-1,1[,\ f(x)^2 \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$
4. ☐ Si $\forall x \in\,]-1,1[,\ f(x) \leqslant g(x)^2$ et $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$
5. ☐ Si $\forall x \in\,]-1,1[,\ f(x) \geqslant 0$ et $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to0} f(x)g(x) = 0$
6. ☐ Si $\forall x \in\,]-1,1[,\ f(x) \leqslant 4$ et $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to0} f(x)g(x) = 0$
7. ☒ Si $\forall x \in\,]-1,1[,\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 4$ et $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to0} f(x)g(x) = 0$
8. ☒ Si $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 4$ et $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to0} f(x)g(x) = 0$

2.2. Exercices

Exercice 2.1. Résoudre les inégalités :

1. $|2x+1| \leqslant 1$;
2. $|x-1| < |x+1|$.

Exercice 2.2. 1. Montrer que $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + |y| = 2y\}$ est le graphe d'une fonction f. Donner l'ensemble de définition de cette fonction et exprimer pour $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x)$ en fonction de x.

2. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + |y| = y^2\}$ est-il le graphe d'une fonction ?

Exercice 2.3. Dans cet exercice, on note f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x^2$.

1. Soient a, b des nombres réels tels que $a < b$.

(a) Trouver une nombre réel $C_{a,b}$ dépendant uniquement de a et de b tel que

$$\forall x, y \in [a,b], \quad |f(x) - f(y)| < C_{a,b}|x-y|.$$

(b) On admet que $\pi \in [3,4]$. Combien de décimales de π faut-il connaître pour calculer π^2 avec une erreur $< 10^{-5}$?

(c) Démontrer en utilisant la définition de la limite que la restriction de f à l'intervalle $[a,b]$ est continue.

2. Existe-t-il une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad |f(x) - f(y)| < C|x-y|?$$

3. L'application f est-elle continue ?

Exercice 2.4. Dans cet exercice, on note f la fonction de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Soient a, b des nombres réels tels que $0 < a < b$.

(a) Trouver une nombre réel $C_{a,b}$ dépendant uniquement de a et de b tel que

$$\forall x, y \in [a,b], \quad |f(x) - f(y)| < C_{a,b}|x-y|.$$

(b) On admet que $\pi \in [3,4]$. Combien de décimales de π faut-il connaître pour calculer $\frac{1}{\pi}$ avec une erreur $< 10^{-5}$?

(c) Démontrer en utilisant la définition de la limite que la restriction de f à l'intervalle $[a,b]$ est continue.

2. Existe-t-il une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^*, \quad |f(x) - f(y)| < C|x-y|?$$

3. L'application f est-elle continue sur son domaine de définition ?

Exercice 2.5. On note f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble A des solutions de l'équation $f(x) = 1$.
3. Déterminer l'ensemble B des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. Démontrer que 0 est adhérent à chacun des ensembles A et B.
5. Démontrer que f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 2.6. Soit f une fonction à valeur réelle définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$. On désigne par a un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}_f$. Soit $l \in \mathbf{R}$.

1. Démontrer que, si f admet pour limite l en a, alors

(1) $$\exists M \in \mathbf{R},\ \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) < M.$$

   Une fonction qui vérifie (1) est dite *localement majorée au voisinage de a*. (Indication : on pourra démontrer que $M = l + 1$ convient).
2. De même, démontrer que si f admet pour limite l en a alors
$$\exists m \in \mathbf{R},\ \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) > m.$$
3. On suppose que la fonction f est donnée par $x \mapsto \frac{1}{x}(\sin(1/x)+1)$.
   (a) Donner dans ce cas le domaine de définition de f.
   (b) Démontrer que f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 2.7. Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$
2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3x}{1-x^3}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, on pourra faire le changement de variable $y^6 = 1+x$

Exercice 2.8. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)^2}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x})$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos(x)}{\pi-3x}$

Exercice 2.9. Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\frac{1}{3}\quad ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{|2x+x^2|}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=-1\quad ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{|x|}+\sqrt{|x|}}{\sqrt[3]{|x|}-\sqrt{|x|}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1\quad ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\frac{2}{3}$$

On rappelle la définition de limite pour une suite, telle qu'elle est donnée en terminale :

Définition 2.1. — *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet pour limite le nombre réel l *si tout intervalle ouvert contenant* l *contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang.*

Exercice 2.10*. Soit X une partie de $\mathbf{R}$ et soit $a\in\mathbf{R}$. Démontrer que a est adhérent à X si et seulement si a est limite d'une suite d'éléments de X.

Exercice 2.11*.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet pour limite le nombre réel l si et seulement si

$$\forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N},\ (n\geqslant N)\Longrightarrow |u_n-l|<\varepsilon.$$

2. Démontrer que si la suite admet l et l' comme limites alors $l=l'$.
3. Soit f une fonction à valeur réelle définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$. Soit $a\in\mathbf{R}$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}_f$ et l un nombre réel. Démontrer que la fonction f admet la limite l en a si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui admet a comme limite, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ admet l comme limite.

Exercice 2.12*. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On suppose que $f(I)\subset I$ et que f est continue. Soit $a\in I$. On note $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'unique suite d'éléments de I qui vérifie les conditions suivantes

$$\begin{cases} u_0=a\\ \forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+1}=f(u_n).\end{cases}$$

Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite $l\in I$, alors $f(l)=l$.

Exercice 2.13*.

1. Soit $n\in\mathbf{N}$. Démontrer que l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $x\mapsto x^n$ est dérivable. Calculer sa dérivée.
2. Démontrer que toute fonction polynomiale est dérivable et donner une formule pour calculer sa dérivée.

Calcul algébrique

Exercices

3.1. Vrai ou faux. —

Vrai-Faux 3.1. Soit n un entier $\geqslant 2$. Parmi les expressions suivantes lesquelles sont toujours égales à n, lesquelles peuvent être différentes et pourquoi ?

1. ☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$.
2. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1$.
3. ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k/n$.
4. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2k/(n-1)$.
5. ☒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=0}^{n-1} h$.
6. ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=2}^{n-1} h$.
7. ☒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{h=2}^{n-2} h$.
8. ☐ $\displaystyle\sum_{k=n}^{n} 1$.
9. ☒ $\displaystyle\sum_{k=n}^{n} k$.

Vrai-Faux 3.2. Soient n et k deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Nous conviendrons que les entiers compris entre k et n sont $k, k+1, \dots, n-1, n$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies, lesquelles peuvent être fausses et pourquoi ?

1. ☒ Le nombre $n!/(n-k)!$ est entier.
2. ☐ Le nombre $k!/(n!)$ est entier.
3. ☐ Il y a $n-k$ entiers compris entre k et n.
4. ☒ Il y a $(n-k+1)^2$ couples d'entiers compris entre k et n.
5. ☐ Il y a $\binom{n-k+1}{3}$ triplets d'entiers, différents deux à deux, et tous compris entre k et n.
6. ☒ Il y a $\binom{n-k+1}{3}$ triplets d'entiers (a, b, c) tels que $a < b < c$, et a, b, c compris entre k et n.
7. ☐ La somme des entiers compris entre k et n est $(n-k)(n-k+1)/2$.
8. ☐ La somme des entiers compris entre k et n est $n(n+1)/2 - k(k+1)/2$.
9. ☒ La somme des entiers compris entre k et n est $n(n+1)/2 - k(k-1)/2$.
10. ☐ La somme des nombres 2^h pour h compris entre k et n vaut $2^{n+1} - 2^{k+1}$.
11. ☒ La somme des nombres 2^h pour h compris entre k et n vaut $2^{n+1} - 2^k$.

Vrai-Faux 3.3. Dans une course de chevaux, 10 chevaux sont au départ. Vous en choisissez 3 que vous classez pour jouer au tiercé. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Il y a 3 tiercés dans le désordre.
2. ☒ Il y a 3! tiercés, dont 1 dans l'ordre.
3. ☐ Il y a $\binom{10}{3}$ tiercés possibles.
4. ☐ Il y a 720 ordres d'arrivée possibles.
5. ☒ Il y a plus de 3 millions d'ordres d'arrivée possibles.
6. ☒ Vous avez 720 choix différents.
7. ☐ Vous avez une chance sur 120 de gagner le tiercé dans l'ordre.
8. ☒ Vous avez une chance sur 120 de gagner, soit dans l'ordre, soit dans le désordre.

Vrai-Faux 3.4. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies pour tout entier n, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

2. ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^n-1}{2}$.
3. ☒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^n-3}{2}$.
4. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n$.
5. ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 3$.
6. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 3^n$.
7. ☒ $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 1 - 3n$.

Vrai-Faux 3.5. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Tout nombre réel a pour argument 0.
2. ☒ Tout nombre réel strictement négatif a pour argument π.
3. ☒ Tout nombre imaginaire pur non nul a pour argument $\pi/2$ ou $3\pi/2$.
4. ☒ Le conjugué d'un nombre imaginaire pur est égal à son opposé.
5. ☐ Si deux nombres complexes ont le même argument alors leur produit est réel.
6. ☒ Le produit de deux nombres imaginaires purs est réel.
7. ☒ Si deux nombres complexes non nuls ont le même argument alors leur quotient est réel.
8. ☒ Si deux nombres complexes non nuls ont le même module alors leur quotient a pour module 1.

Vrai-Faux 3.6. Soit z un nombre complexe non nul. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Le module de z égal au module de son conjugué.
2. ☐ L'argument de z est l'opposé de l'argument de son conjugué.
3. ☒ Le produit de z par une racine n-ième de l'unité a le même module que z.

4. ☐ L'argument de $-z$ est l'opposé de l'argument de z.
5. ☒ Si la partie imaginaire de z est positive, alors son argument est compris entre 0 et π.
6. ☐ L'argument de z^2 est le double de l'argument de z.
7. ☒ L'argument de $z/\overline{z}$ est égal à l'argument de z^2.

Vrai-Faux 3.7. On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ la partie réelle de z est l'opposé de sa partie imaginaire.
2. ☒ la partie réelle de z^2 est l'opposé de sa partie imaginaire.
3. ☐ l'argument de z^2 est $-\pi/4$.
4. ☒ l'argument de z^2 est $7\pi/4$.
5. ☐ le module de z^2 est 16.
6. ☒ le module de z est 2.
7. ☒ $z^2 = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$.
8. ☐ $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}$.
9. ☒ $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(7\pi/8)}$.
10. ☐ $\cos(7\pi/8) = (\sqrt{2+\sqrt{2}})/2$.
11. ☒ $\cos(\pi/8) = (\sqrt{2+\sqrt{2}})/2$.
12. ☒ $\sin(7\pi/8) = (\sqrt{2-\sqrt{2}})/2$.

Vrai-Faux 3.8. A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe $z' = (z-4\mathrm{i})/(z+2)$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ L'ensemble des points d'affixe z tels que z' est réel est un cercle.
2. ☒ L'ensemble des points d'affixe z tels que z' est réel est une droite privée d'un point.
3. ☒ L'ensemble des points d'affixe z tels que z' est imaginaire pur est un cercle privé d'un point.
4. ☐ L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est un cercle.
5. ☐ L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est une droite privée d'un point.
6. ☒ L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est une droite.

Vrai-Faux 3.9. L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $\mathrm{i}z - 1$ est (vrai ou faux et pourquoi) ?

1. ☐ une translation.
2. ☐ une homothétie de rapport i.
3. ☒ une rotation.
4. ☐ une rotation dont le centre est le point d'affixe 1.
5. ☒ une rotation dont le centre est le point d'affixe $-(1+\mathrm{i})/2$.
6. ☐ une rotation d'angle $-\pi/2$.

Vrai-Faux 3.10. L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $\mathrm{i}\,\overline{z}$ est (vrai ou faux et pourquoi) ?

1. ☐ une homothétie de rapport i.
2. ☐ une rotation.
3. ☒ une symétrie.
4. ☐ la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
5. ☒ la symétrie par rapport à la première bissectrice.

3.2. Exercices

Exercice 3.1. Calculer les nombres suivants.

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} 1\,,\quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h\,,\quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k\,,$$
$$\sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h\,,\quad \sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k\,,\quad \prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h\,,$$
$$\prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k\,,\quad \prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h\,,\quad \prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k\,.$$

Exercice 3.2. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre variables. Ecrire à l'aide des symboles $\sum$ et $\prod$ les quantités suivantes.

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.
2. $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4$.
3. $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4$.
4. $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4$.

5. $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4$.
6. $a_1(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$.

Exercice 3.3. Démontrer par récurrence les assertions suivantes.

1. $\forall n \in \mathbf{N}\ ,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1) = (n+1)(n+2)/2.$
2. $\forall n \in \mathbf{N}\ ,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$
3. $\forall n \in \mathbf{N}\ ,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4.$
4. $\forall n \in \mathbf{N}\ ,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$
5. $\forall n \in \mathbf{N}\ ,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$
6. $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3\ ,\quad \displaystyle\prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-4}{k} = \frac{(n+2)!}{12n(n-1)}.$
7. $\forall n \in \mathbf{N}^*,\quad \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1).$

Exercice 3.4. Démontrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\ n!.$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n\ n!}.$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1} = 2n+1.$
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}.$

Exercice 3.5. Une entreprise veut se donner un nouveau sigle, qui soit formé d'exactement 3 lettres. De combien de façons peut-elle le faire ? Combien reste-t-il de possibilités si on impose au sigle d'être formé de lettres distinctes ?

Exercice 3.6. On met dans une boîte 26 jetons de Scrabble, portant chacune des lettres de l'alphabet. On en tire 3 à la fois. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Exercice 3.7. Dix personnes doivent s'asseoir autour d'une table circulaire. On considère comme identiques deux dispositions dont l'une se déduit de l'autre par une rotation. Combien y a-t-il de dispositions possibles ? Combien en reste-t-il si deux personnes données refusent d'être assises à côté ?

Exercice 3.8. Une association comprenant 20 membres dont 12 femmes et 8 hommes désire former un comité de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins deux hommes et deux femmes. Calculer de combien de façons on peut former ce comité dans chacun des cas suivants.

1. Chaque membre de l'association accepte d'en faire partie.
2. Deux des femmes refusent d'en faire partie.
3. Monsieur X et Madame Y refusent de siéger ensemble.

Exercice 3.9. Démontrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

Exercice 3.10. Démontrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n - 2$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{k/2} = \frac{2^n - 1}{\sqrt{2} - 1}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} = \frac{4^{2n+1} - 1}{6}$.

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{n-k} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}$.

Exercice 3.11. Démontrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$ *(ajoutez les deux égalités précédentes).*
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{3k-1} \binom{n}{k} = 9^n/2$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{3k} 3^{n-2k} \binom{n}{k} = (73/3)^n$.
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{i}^k \binom{n}{k} = 2^{n/2} \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4}$.
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k/2} \mathrm{i}^k \binom{n}{k} = 2^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/3}$.
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (nk - 1) = \frac{n(n-1)(n+2)}{2}$.

Exercice 3.12. Calculer les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+4} (k-2)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k+1} 2^{n-3k}$.

Exercice 3.13. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $f(x) = (1+x)^n$.

1. En utilisant une formule du cours, écrivez $f(x)$ comme une somme où interviennent les puissances de x.
2. La dérivée de f est $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$. L'intégrale de f sur $[0,1]$ vaut
$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$
En utilisant la question 1. donner une autre expression de $f'(x)$ et de cette intégrale.
3. En déduire les valeurs des expressions suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 3.14. Soient n et p deux entiers naturels. Cet exercice présente une méthode générale pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k^p$, sur le cas particulier $p = 2$.

1. Soit $x \to P(x)$ une fonction, donner une expression plus simple de $\sum_{k=0}^{n}(P(k+1) - P(k))$.
2. Soit a, b, c des réels et $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Calculer $P(x+1) - P(x)$.
3. Déterminer a, b, c de sorte que $P(x+1) - P(x) = x^2$.
4. Déduire des questions précédentes que
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 3.15. Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout nombre entier naturel n non nul, et pour tout n-uplets de réels $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

On pose $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$, $C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

1. Soit $P(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$. Exprimez $P(x)$ en fonction de A, B, C et x.

2. Si $A \neq 0$, quel est le signe du **trinôme** du second degré P ?
3. Déduisez que $C^2 \leqslant AB$.
4. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs. Montrez que
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geqslant n^2$$

Exercice 3.16. Mettre sous la forme $a + \mathrm{i}b$ les nombres complexes suivants.
$$\frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}\,, \quad \frac{5+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\,, \quad \frac{-2}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\,, \quad \frac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\,,$$
$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2 + \frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}\,, \quad \frac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \frac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\,, \quad \left(\frac{1+\mathrm{i}-\sqrt{3}(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right)^2 .$$

Exercice 3.17. Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants.
$$1+\mathrm{i}\,, \quad 3+3\mathrm{i}\,, \quad 1+\mathrm{i}\sqrt{3}\,, \quad -1+\mathrm{i}\sqrt{3}\,,$$
$$\sqrt{3}+\mathrm{i}\,, \quad -\frac{4}{3}\mathrm{i}\,, \quad 1+\mathrm{i}(1+\sqrt{2})\,, \quad (1+\sqrt{2})-\mathrm{i}\,.$$

Exercice 3.18. Mettre sous la forme $a + \mathrm{i}b$ les nombres complexes suivants.
$$2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\,, \quad 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}\,, \quad 2\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}\pi/3}\,, \quad 3\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}\pi/8}\,,$$
$$(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4})\,, \quad \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4}}$$
$$(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})(3\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6})\,, \quad \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}{3\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6}}$$

Exercice 3.19. Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.
$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\,, \quad \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3\,, \quad (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^4$$
$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5 + (1-\mathrm{i}\sqrt{3})^5\,, \quad \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\,, \quad \frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2-2\mathrm{i}}$$

Exercice 3.20. Calculer les racines carrées des nombres suivants.
$$-1\,, \quad \mathrm{i}\,, \quad 1+\mathrm{i}\,, \quad -1-\mathrm{i}\,, \quad 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$$
$$3+4\mathrm{i}\,, \quad 8-6\mathrm{i}\,, \quad 7+24\mathrm{i}\,, \quad 3-4\mathrm{i}\,, \quad 24-10\mathrm{i}$$

Exercice 3.21.

1. Calculer les racines carrées de $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les racines carrées de $(\sqrt{3}+\mathrm{i})/2$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 3.22. Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes.

$$z^2+z+1=0\ ,\quad z^2-z+1=0\ ,\quad z^2+2z+4=0\ ,$$
$$4z^2-2z+1=0\ ,\quad z^2+(1+2\mathrm{i})z+\mathrm{i}-1=0\ ,\quad z^2-(3+4\mathrm{i})z-1+5\mathrm{i}=0\ ,$$
$$z^2+4z+5=0\ ,\quad z^2-(1-\mathrm{i})z-\mathrm{i}=0\ ,\quad z^2-(11-5\mathrm{i})z+24-27\mathrm{i}=0\ ,$$
$$z^3=\mathrm{i}\ ,\quad z^3=\frac{-1+\mathrm{i}}{4}\ ,\quad z^3=2-2\mathrm{i}\ ,$$
$$z^4=1\ ,\quad z^4=(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2\ ,\quad \left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1\ .$$

Exercice 3.23. Soit θ un réel.

1. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.
2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$.

Exercice 3.24. Montrer en utilisant la formule de Moivre que :

$$\cos(4x)=8\cos^4(x)-8\cos^2(x)+1\ ,\quad \sin(4x)=4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)$$

Exercice 3.25. Linéariser :

$$\cos^3(x)\ ,\quad \sin^3(x)\ ,\quad \cos^4(x)\ ,\quad \sin^4(x)\ ,$$
$$\cos^2(x)\sin^2(x)\ ,\quad \cos(x)\sin^3(x)\ ,\quad \cos^3(x)\sin(x)\ ,$$
$$\cos^3(x)\sin^2(x)\ ,\quad \cos^2(x)\sin^3(x)\ ,\quad \cos(x)\sin^4(x)\ .$$

Exercice 3.26.

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $(1-z)/(1-\mathrm{i}z)$ soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $(1-z)/(1-\mathrm{i}z)$ soit imaginaire pur.
3. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixe 1, z, $1+z^2$ soient alignés.

4. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixe z, $\mathrm{i}z$, i forment un triangle équilatéral.
5. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixe z, z^2, z^3 forment un triangle rectangle au point d'affixe z.
6. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixe z, $1/z$, $1-z$ soient sur un même cercle, de centre l'origine.

Exercice 3.27.

1. Montrer que $(1+\mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i}$.
2. En déduire une solution de l'équation $(E) \quad z^2 = -8\mathrm{i}$.
3. Ecrire les deux solutions de (E) sous forme algébrique, et sous forme exponentielle.
4. Déduire de la première question une solution de l'équation $(E') \quad z^3 = -8\mathrm{i}$.
5. Soit A le point d'affixe $2\mathrm{i}$. Soit B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$. Soit C l'image de B par la même rotation. Ecrire les affixes des points B et C, sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
6. Vérifier que les affixes calculées à la question précédente sont solution de (E').
7. Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre de gravité.

Exercice 3.28. On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. On pose $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c. On note

- A' l'image de B par la rotation de centre C, et d'angle $\pi/3$
- B' l'image de C par la rotation de centre A, et d'angle $\pi/3$
- C' l'image de A par la rotation de centre B. et d'angle $\pi/3$

On note a', b' et c' les affixes respectives de A', B' et C'.

1. Calculer a', b' et c'.
2. Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en 0.
3. Montrer que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$
4. Soit z un nombre complexe quelconque. Montrer que
$$|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = 22$$
5. On admet que quels que soient les nombres complexes z et z', $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$. Montrer que la somme de distances $MA+MB+MC$ est minimale lorsque $M = O$.

Exercice 3.29. Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout nombre réel t, on définit
$$P_n(t) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k).$$

Par convention, $P_0(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

1. Écrire $P_1(t)$ et $P_2(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$, sans utiliser le signe $\prod$.
2. Calculer $P_n(m)$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \{0, \dots, n-1\}$.
3. Calculer $P_n(n)$ pour $n \in \mathbf{N}$.
4. On suppose que $m > n$, écrire $P_n(m)$ en termes du coefficient binomial $\binom{m}{n}$.
5. Démontrer la formule

$$P_n(t+1) - P_n(t) = P_{n-1}(t) \tag{2}$$

   pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in \mathbf{R}$. Quelle formule concernant les coefficients binomiaux retrouve-t-on ainsi si t est un entier m ?
6. Déduire de la formule (2), en raisonnant par récurrence sur m, une démonstration de la formule
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{6}.$$
7. Démontrer, pour $m, n \in \mathbf{N}$, la formule
$$\sum_{k=0}^{m} P_n(k) = P_{n+1}(m+1).$$

Plan et espace

Exercices

4.1. Vrai ou faux

Vrai-Faux 4.1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul dans un espace vectoriel et A un point d'un espace affine associé. On pose $B = A+\vec{u}$ et $C = A-\vec{u}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux.
2. ☒ Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux.
3. ☐ $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère affine.
4. ☒ $(A, \overrightarrow{AB})$ est un repère affine de la droite passant par B et C.
5. ☐ Le point B est le milieu du segment $[AC]$.
6. ☒ Le point A est le milieu de B et C.
7. ☐ $C = B + 2\vec{u}$.
8. ☒ $A = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
9. ☒ $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + 2\overrightarrow{CA}$.

Vrai-Faux 4.2. Soient A, B, C trois points d'un plan affine $\mathscr{P}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une famille libre, alors $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$.
2. ☐ Si $B \neq C$ alors $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$.
3. ☒ Si $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$, alors $(C, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$.
4. ☒ Si $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$, alors $(C, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB})$ est un repère de $\mathscr{P}$.
5. ☐ $(B, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})$ est un repère de $\mathscr{P}$.
6. ☒ Si $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$, alors $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ est un repère de $\mathscr{P}$.

Vrai-Faux 4.3. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension 3 dont les coordonnées (x, y, z) dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathscr{E}$ vérifient $x + 2y + 3 = 0$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\mathscr{F}$ est une droite affine.
2. ☐ $\mathscr{F}$ contient le point O.
3. ☒ Si $\mathscr{F}$ contient un point M, alors il contient le point $M + \vec{k}$.
4. ☒ $\vec{k}$ appartient à l'espace vectoriel associé à $\mathscr{F}$.
5. ☐ $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathscr{F}$.
6. ☒ $2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathscr{F}$.
7. ☒ $(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}, 3\vec{k})$ est une base du plan vectoriel associé à $\mathscr{F}$.
8. ☐ $(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}, -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 6\vec{k})$ est une base du plan vectoriel associé à $\mathscr{F}$.

Vrai-Faux 4.4. On considère un espace vectoriel E, muni d'un repère orthonormé. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille libre dans E.
2. ☐ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$.
3. ☒ Si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2$, alors $\vec{u} = \vec{v}$.
4. ☐ $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
5. ☐ $(\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
6. ☒ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
7. ☒ $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.
8. ☐ Si $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 0$ alors $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 0$.
9. ☒ Si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 0$ alors $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

Vrai-Faux 4.5. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, que l'on munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on note $\mathscr{P}$ le plan d'équation implicite $2x+2y+z+3 = 0$, et H la projection orthogonale de O sur $\mathscr{P}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $O \in \mathscr{P}$.
2. ☐ le vecteur de coordonnées $(2, 2, 1)$ appartient à l'espace vectoriel associé à $\mathscr{P}$.
3. ☒ Toute droite de vecteur directeur $(2, 2, 1)$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

4. ☐ H est le point de coordonnées $(2, 2, 1)$.
5. ☒ La distance de O à $\mathscr{P}$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OH}$.
6. ☒ La distance de O à $\mathscr{P}$ vaut 1.
7. ☒ Le vecteur de coordonnées $(1, 0, -2)$ appartient à l'espace vectoriel associé à $\mathscr{P}$.
8. ☐ La distance de O à la droite passant par H dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(1, 0, -2)$ est strictement supérieure à 1.
9. ☐ Il existe une droite dans $\mathscr{P}$ telle que la distance de O à cette droite soit strictement inférieure à 1.

Vrai-Faux 4.6. On considère deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ dans un espace affine de dimension 3. On note P_1 et P_2 les plans vectoriels associés. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ L'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est une droite affine si et seulement si P_1 et P_2 sont distincts.
2. ☒ Si $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$, alors la distance à $\mathscr{P}_2$ d'un point M de $\mathscr{P}_1$ ne dépend pas de M.
3. ☐ Il se peut que tout vecteur de P_1 soit orthogonal à tout vecteur de P_2.
4. ☐ Si P_2 contient l'ensemble des vecteurs orthogonaux à P_1 alors $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles ou confondus.
5. ☒ Si P_2 contient l'ensemble des vecteurs orthogonaux à P_1 alors P_1 contient l'ensemble des vecteurs orthogonaux à P_2.
6. ☐ S'il existe deux droites perpendiculaires, une dans $\mathscr{P}_1$, l'autre dans $\mathscr{P}_2$, alors P_1 contient l'ensemble des vecteurs orthogonaux à P_2.
7. ☒ Si $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset$, alors pour toute droite de $\mathscr{P}_1$, il existe une droite de $\mathscr{P}_2$, telle que ces deux droites sont perpendiculaires.

Vrai-Faux 4.7. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques dans un espace vectoriel de dimension 3. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.
2. ☐ Si $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$ alors $\vec{u} = \vec{v}$.
3. ☒ Si $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
4. ☒ Si $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$ est colinéaire à $\vec{v}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

5. ☐ Si $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
6. ☒ Si $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
7. ☐ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \vec{v}$.
8. ☒ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

4.2. Exercices

Exercice 4.1. Soient A, B, C trois points du plan affine.
Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
Soit O un point du plan.

1. Soit M un point du plan.
   Montrer que $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$.
   En déduire qu'il existe un unique point M du plan affine tel que $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. On dit que M est le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$.
2. On suppose que M est le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$.
   Montrer que pour tout point du plan N, $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{NM} = \alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NC}$.
3. Si $\alpha = \beta = \gamma$, on dit que M est l'isobarycentre de (A, B, C).
   Soit G l'isobarycentre de (A, B, C).
   Soit A' (resp. B', resp. C') le milieu de B, C, (resp. A, C, resp. A, B)
   Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.
   En déduire que G appartient à l'intersection des médianes.
4. ABC est un triangle.
   On considère le barycentre G de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ dans les cas suivants. Construisez G.
   (a) $\alpha = 3$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$. On introduira le milieu de BC.
   (b) $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{5}{6}$. On remarquera que $-\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \alpha = \frac{1}{3}$.
   (c) $\alpha = -3$, $\beta = 2$, $\gamma = 5$.
   (d) $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

Exercice 4.2. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan vectoriel P.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan donnés par leurs coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On considérera les cas suivants :

$$\vec{u} \ : \ (1, 1) \quad \vec{v} \ : \ (1, -1)$$

$$\vec{u} \ : \ (2,2) \quad \vec{v} \ : \ (-4,-4)$$
$$\vec{u} \ : \ (1,2) \quad \vec{v} \ : \ (1,1)$$

1. Calculer $\mathrm{Det}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u},\vec{v})$ et en déduire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, déterminer les coordonnées dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ du vecteur $3\vec{\imath}-\vec{\jmath}$.

Exercice 4.3. Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère affine d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension 3 .

1. Dire dans chacun des cas suivants si les points A,B,C donnés par leurs coordonnées dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont alignés.
$$A \ : \ (1,1,0) \quad B \ : \ (1,-1,2) \quad C \ : \ (-1,0,3)$$
$$A \ : \ (1,1,0) \quad B \ : \ (1,-1,2) \quad C \ : \ (1,-2,3)$$
Donner selon les cas des équations implicites et paramétriques de la droite ou du plan qu'ils engendrent.
2. Dire dans chacun des cas suivants si les points A,B,C,D donnés par leurs coordonnées dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont coplanaires.
$$A \ : \ (1,1,0) \quad B \ : \ (1,-1,2) \quad C \ : \ (-1,0,3) \quad D \ : \ (2,1,6)$$
$$A \ : \ (1,1,0) \quad B \ : \ (1,-1,2) \quad C \ : \ (-1,0,3) \quad D \ : \ (2,3,-3)$$
Dans le cas où ils sont coplanaires, donner l'équation implicite et les équations paramétriques du plan qu'ils engendrent.

Exercice 4.4. Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites dans le plan, données par leurs équations implicites ou paramétriques dans un repère affine. Déterminer si les droites sont sécantes, parallèles ou confondues. Dans le cas ou elles sont sécantes, donner les coordonnées de leur point d'intersection.

$$\mathscr{D}_1 : 3x+5y-2=0 \ ; \quad \mathscr{D}_2 : x-2y+3=0 \ .$$
$$\mathscr{D}_1 : 2x-4y+1=0 \ ; \quad \mathscr{D}_2 : -5x+10y+3=0 \ .$$
$$\mathscr{D}_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3+4\lambda \\ y & = & 2-\lambda \end{array} \right. \ ; \quad \mathscr{D}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 5-\mu \\ y & = & 2+3\mu \end{array} \right. \ .$$
$$\mathscr{D}_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1+2\lambda \\ y & = & 2-3\lambda \end{array} \right. \ ; \quad \mathscr{D}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3-4\mu \\ y & = & -1+6\mu \end{array} \right. \ .$$
$$\mathscr{D}_1 : x-2y+3=0 \ ; \quad \mathscr{D}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2+\mu \\ y & = & 3-2\mu \end{array} \right. \ .$$
$$\mathscr{D}_1 : 3x-2y+1=0 \ ; \quad \mathscr{D}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1-4\mu \\ y & = & 2-6\mu \end{array} \right. \ .$$

Exercice 4.5. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. Soient A, B, C des points de $\mathscr{E}$.

1. Démontrer les inégalités triangulaires :
$$AC \leqslant AB + BC$$
et
$$|AB - AC| \leqslant BC.$$
2. On suppose que $AC = AB + BC$ que peut-on dire de la position des points A, B et C.

Exercice 4.6. Soit A un point du plan, donné par ses coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, déterminé par ses coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considérera les cas suivants.

$$A : (-1, 1)\ , \quad \vec{u} : (1, 0)\ .$$
$$A : (2, 1)\ , \quad \vec{u} : (-3, -1)\ .$$
$$A : (0, 1)\ , \quad \vec{u} : (1, 2)\ .$$
$$A : (-3, 1)\ , \quad \vec{u} : (1, -1)\ .$$

1. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite $\mathscr{D}$ passant par A, admettant $\vec{u}$ comme vecteur directeur.
2. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite $\mathscr{D}'$ passant par A, et perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Exercice 4.7. On considère trois points A, B, C non alignés d'un plan affine. On note $\mathscr{D}_1$ (respectivement $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$) la droite (B, C) (respectivement (A, C), (A, B)).

1. Montrer que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
2. Donner les équations des 3 droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$, dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
3. Donner les équations des 3 médianes du triangle ABC dans le même repère.
4. Donner les coordonnées de l'isobarycentre de A, B, C dans le même repère, et vérifier qu'il est le point d'intersection des trois médianes.
5. Montrer que $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est un repère du plan et déterminer l'ensemble des points ayant les mêmes coordonnées dans les deux repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

6. Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan affine, dont une équation implicite dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $ax + by + c$. A quelles conditions portant sur les réels a, b, c la droite $\mathscr{D}$ est-elle sécante avec les trois droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$?
   On suppose ces conditions réalisées et on note I (respectivement J, K) le point d'intersection de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{D}_1$ (respectivement $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$).
7. On appelle « diagonales » les segments $[A, I]$, $[B, J]$, $[C, K]$. Donner les coordonnées des milieux des 3 diagonales dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, et vérifier que ces trois points sont alignés.

Exercice 4.8. Soient A, B, C trois points du plan affine, donnés par leurs coordonnées dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considérera les cas suivants.

$$A : (0, 0)\ , \quad B : (0, 1)\ , \quad C : (1, 0)\ .$$
$$A : (0, 3)\ , \quad B : (-2, 0)\ , \quad C : (0, 2)\ .$$
$$A : (1, 0)\ , \quad B : (-1, 0)\ , \quad C : (2, 3)\ .$$
$$A : (2, 0)\ , \quad B : (-1, 4)\ , \quad C : (-4, 3)\ .$$

1. Donner des équations paramétriques et implicites des trois droites passant par (A, B), (A, C), (B, C).
2. Donner des équations paramétriques et implicites des trois médianes du triangle ABC et vérifier que l'isobarycentre G de A, B, C est leur point d'intersection.
3. Donner des équations paramétriques et implicites des trois hauteurs du triangle ABC. Vérifier qu'elles sont concourantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection H.
4. Donner des équations paramétriques et implicites des trois médiatrices du triangle ABC. Vérifier qu'elles sont concourantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection M.
5. Vérifier que les trois points G, H, M sont alignés et que $\overrightarrow{MH} = 3\overrightarrow{MG}$.

Exercice 4.9. Soient A, B, C, D quatre points d'un plan affine. Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$, $[A, C]$, $[B, D]$.

1. Montrer que les segments $[I, K]$, $[J, L]$ et $[M, N]$ ont le même milieu.
2. Montrer que le quadrilatère de sommets I, J, K, L est un parallélogramme.

Exercice 4.10. Dans un plan affine, muni d'un repère orthonormé, on considère deux droites sécantes, $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, données par leurs équations implicites :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

1. Soit M un point équidistant des deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Quelle équation vérifient les coordonnées (x, y) de M ?
2. En déduire que l'ensemble des points équidistants de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est la réunion de deux droites Δ_1 et Δ_2, dont on donnera une équation implicite.
3. Vérifier que Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.
4. Pour $i = 1, 2$, soit $\vec{u_i}$ un vecteur directeur de D_i, $\vec{v_i}$ un vecteur directeur de Δ_i. On suppose que ces 4 vecteurs ont tous la même norme. Montrer que :
$$|\vec{u_1} \cdot \vec{v_1}| = |\vec{u_2} \cdot \vec{v_1}| \quad \text{et} \quad |\vec{u_1} \cdot \vec{v_2}| = |\vec{u_2} \cdot \vec{v_2}|$$
5. Donner des équations paramétriques et implicites des droites Δ_1 et Δ_2 dans les cas suivants.
$$\mathscr{D}_1 : x = 1 \ ; \quad \mathscr{D}_2 : y = 1 \ .$$
$$\mathscr{D}_1 : x + y = 2 \ ; \quad \mathscr{D}_2 : x - y = 2 \ .$$
$$\mathscr{D}_1 : x + y = 2 \ ; \quad \mathscr{D}_2 : y = 1 \ .$$
$$\mathscr{D}_1 : 2x + y = 3 \ ; \quad \mathscr{D}_2 : x - 2y = -1 \ .$$

Exercice 4.11. Soit a, b deux réels. Soit D_1 la droite d'équation $2x + ay - 1 = 0$ et D_2 la droite d'équations paramétriques $x = b - \lambda$, $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Discuter suivant les valeurs de a et b si D_1 et D_2 sont sécantes, parallèles ou confondues.

Exercice 4.12. On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations (AB) : $x + 2y = 3$, $(AC) : x + y = 2$, $(BC) : 2x + 3y = 4$.

1. Donnez les coordonnées des points A, B, C.
2. Donnez les coordonnées des milieux A', B', C' de (BC), (AC) et (AB) respectivement.
3. Donnez une équation de chaque médiane et vérifiez qu'elles sont concourantes.

Exercice 4.13. Soit A un point donné par ses coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul donné par ses coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considérera les cas suivants.
$$A : (1, 0, 0) \ , \quad \vec{u} : (1, 1, 1) \ .$$
$$A : (1, -1, 1) \ , \quad \vec{u} : (1, 1, 1) \ .$$
$$A : (1, 0, 0) \ , \quad \vec{u} : (1, -1, 1) \ .$$
$$A : (1, 2, 3) \ , \quad \vec{u} : (3, 2, 1) \ .$$

1. Donner des équations paramétriques et implicites pour la droite $\mathscr{D}$, de vecteur directeur $\vec{u}$, passant par A.

2. Donner des équations paramétriques et implicites pour le plan $\mathscr{P}$ passant par A et orthogonal à $\mathscr{D}$.
3. Calculer la distance de O à $\mathscr{P}$ et de O à $\mathscr{D}$.

Exercice 4.14. Soient A, B, C, D quatre points d'un espace affine de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les points sont donnés par leur coordonnées. On considérera les cas suivants.

$$A : (0,0,0)\ ,\quad B : (1,0,0)\ ,\quad C : (0,1,0)\ ,\quad D : (0,0,1)\ .$$
$$A : (0,0,0)\ ,\quad B : (1,0,0)\ ,\quad C : (1,1,0)\ ,\quad D : (1,1,1)\ .$$
$$A : (1,0,0)\ ,\quad B : (1,2,-1)\ ,\quad C : (-1,1,2)\ ,\quad D : (2,-1,1)\ .$$
$$A : (1,2,3)\ ,\quad B : (1,3,2)\ ,\quad C : (3,1,2)\ ,\quad D : (3,3,3)\ .$$

1. Vérifier que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère.
2. On pose $A' = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Calculer les coordonnées de A'. Vérifier que $(A', \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'D})$ est un repère.
3. Donner les coordonnées de A' dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
4. Déterminer des équations paramétriques et implicites des 3 plans, contenant respectivement (A, B, C), (A, B, D), (A, C, D), dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
5. Déterminer des équations paramétriques et implicites des 3 plans, contenant respectivement (A, B, C), (A, B, D), (A, C, D), dans le repère $(A', \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'D})$.
6. En supposant le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé, calculer la distance de A' à chacun des trois plans de la question précédente.
7. Calculer la distance de A' à chacune des 3 droites, contenant respectivement (A, B), (A, C), (A, D).
8. Reprendre les questions 3 à 7 en échangeant les rôles de A et A'.

Exercice 4.15. Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans non parallèles et A un point n'appartenant ni à $\mathscr{P}_1$ ni à $\mathscr{P}_2$ dans un espace de dimension 3, muni d'un repère orthonormé. Les deux plans sont donnés par des équations implicites et A par ses coordonnées. On note $\mathscr{D}$ la droite intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. On considérera les cas suivants.

$$\mathscr{P}_1 : z = 0\ ;\quad \mathscr{P}_2 : y = 0\ ,\quad A : (1,1,1)\ .$$
$$\mathscr{P}_1 : x + y = 0\ ;\quad \mathscr{P}_2 : x + z + 1 = 0\ ,\quad A : (1,1,1)\ .$$
$$\mathscr{P}_1 : x + y + z + 2 = 0\ ;\quad \mathscr{P}_2 : 2x - y + 3z - 4 = 0\ ,\quad A : (2,1,0)\ .$$
$$\mathscr{P}_1 : 2x + y - z - 2 = 0\ ;\quad \mathscr{P}_2 : x + 3y + 7z - 11 = 0\ ,\quad A : (1,2,1)\ .$$

$$\mathscr{P}_1 : 2x - y + 1 = 0 \; ; \quad \mathscr{P}_2 : 3y - z - 2 = 0 \; , \quad A : (3, -1, 2) \; .$$
$$\mathscr{P}_1 : x + y + z - 1 = 0 \; ; \quad \mathscr{P}_2 : -x + y - z + 1 = 0 \; , \quad A : (1, 1, 2) \; .$$

1. Vérifier que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Donner des équations paramétriques de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
3. Donner des équations paramétriques de $\mathscr{D}$.
4. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite orthogonale à $\mathscr{P}_1$ passant par A.
5. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite orthogonale à $\mathscr{P}_2$ passant par A.
6. Donner des équations paramétriques et implicites du plan orthogonal à $\mathscr{D}$ passant par A.
7. Calculer la distance de A à $\mathscr{P}_1$, puis à $\mathscr{P}_2$, puis à $\mathscr{D}$.

Exercice 4.16. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, trois vecteurs déterminés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considérera les cas suivants.

$$\vec{u} : (1, 0, 0) \; , \quad \vec{v} : (1, 1, 0) \; , \quad \vec{w} : (1, 1, 1) \; .$$
$$\vec{u} : (0, 2, 2) \; , \quad \vec{v} : (1, 0, 1) \; , \quad \vec{w} : (1, 2, 0) \; .$$
$$\vec{u} : (0, 2, 1) \; , \quad \vec{v} : (2, 1, -1) \; , \quad \vec{w} : (-1, 2, 1) \; .$$
$$\vec{u} : (1, 1, -2) \; , \quad \vec{v} : (1, -2, 1) \; , \quad \vec{w} : (-2, 1, 1) \; .$$
$$\vec{u} : (1, 2, 3) \; , \quad \vec{v} : (4, 5, 6) \; , \quad \vec{w} : (7, 8, 9) \; .$$
$$\vec{u} : (1, -3, 2) \; , \quad \vec{v} : (-5, 3, 4) \; , \quad \vec{w} : (-2, 3, -1) \; .$$

1. Calculer les trois produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
2. Calculer les trois produits vectoriels $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$.
3. Calculer les trois produits scalaires $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$, $\vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u})$, $\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Exercice 4.17. *Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.* Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, trois vecteurs non coplanaires, donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considérera les cas suivants.

$$\vec{u} : (1, 0, 0) \; , \quad \vec{v} : (1, 1, 0) \; , \quad \vec{w} : (1, 1, 1) \; .$$
$$\vec{u} : (0, 2, 2) \; , \quad \vec{v} : (1, 0, 1) \; , \quad \vec{w} : (1, 2, 0) \; .$$
$$\vec{u} : (0, 2, 1) \; , \quad \vec{v} : (2, 1, -1) \; , \quad \vec{w} : (-1, 2, 1) \; .$$
$$\vec{u} : (1, -3, 2) \; , \quad \vec{v} : (-5, 3, 4) \; , \quad \vec{w} : (-2, 3, -1) \; .$$

1. Calculer $\|\vec{u}\|$. On pose $\vec{u}' = (1/\|\vec{u}\|)\vec{u}$. Calculer les coordonnées de $\vec{u}'$.

2. On pose :
$$\vec{v_1} = \vec{v} - (\vec{u}' \cdot \vec{v})\vec{u}' \ ,$$
puis $\vec{v}' = (1/\|\vec{v_1}\|)\vec{v_1}$. Calculer les coordonnées de $\vec{v}'$.
3. On pose :
$$\overrightarrow{w_1} = \vec{w} - (\vec{u}' \cdot \vec{w})\vec{u}' - (\vec{v}' \cdot \vec{w})\vec{v}' \ ,$$
puis $\vec{w}' = (1/\|\overrightarrow{w_1}\|)\overrightarrow{w_1}$. Calculer les coordonnées de $\vec{w}'$.
4. Vérifier que $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ est une base orthonormée.
5. Démontrer que si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base quelconque de l'espace vectoriel, alors $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ est une base orthonormée.

Exercice 4.18. Soit $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{P}$) une droite (resp. un plan) de l'espace donnée par leurs équations paramétriques ou implicites.

Déterminer l'intersection $\mathscr{P} \cap \mathscr{D}$ dans les quatre cas suivants :

1. $\mathscr{D} : \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 2z = 5 \end{cases} \qquad \mathscr{P} : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = 3 - \lambda + 2\mu \\ z = 4 - 2\lambda - 3\mu \end{cases}.$
2. $\mathscr{D} : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 6 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases} \qquad \mathscr{P} : x - y - 2z = 3.$
3. $\mathscr{D} : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 6 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases} \qquad \mathscr{P} : \begin{cases} x = 4 + 2\lambda - \mu \\ y = 7 - \lambda + 3\mu \\ z = 6 - \lambda + \mu \end{cases}.$
4. $\mathscr{D} : \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 2z = 5 \end{cases} \qquad \mathscr{P} : x - 3y - 6z = 11.$

Exercice 4.19. *Perpendiculaire commune à deux droites*

Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites non parallèles.
$\mathscr{D}_1$ est donnée par un point A_1 et un vecteur directeur $\vec{u_1}$.
$\mathscr{D}_2$ est donnée par un point A_2 et un vecteur directeur $\vec{u_2}$.
On note $\vec{v} = \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$.

1. Montrer que $\vec{v} \neq \vec{0}$.
2. On considère le plan $\mathscr{P}_1$ passant par A_1 et de direction $\vec{u_1}, \vec{v}$ et le plan $\mathscr{P}_2$ passant par A_2 et de direction $\vec{u_2}, \vec{v}$.

   Montrer que $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est une droite de direction $\vec{v}$.

   On la notera Δ.

3. Montrer que $\mathscr{P}_1$ coupe $\mathscr{D}_2$ en un point qu'on notera H_2 et que $\mathscr{P}_2$ coupe $\mathscr{D}_1$ en un point qu'on notera H_1.
   Montrer que $H_1 \in \mathscr{D}_1 \cap \Delta$ et $H_2 \in \mathscr{D}_2 \cap \Delta$.
   La droite Δ est appelée la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
   Pourquoi cette appelation ?
4. Montrer que pour tout point M_1 de $\mathscr{D}_1$ et tout point M_2 de $\mathscr{D}_2$, $M_1M_2 \geqslant H_1H_2$.
   Montrer qu'on a égalité si et seulement si $M_1 = H_1$ et $M_2 = H_2$.
   Ainsi H_1H_2 est la distance entre les deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
5. Montrer en utilisant la relation $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{H_2A_2} + \overrightarrow{H_1H_2}$ que
$$H_1H_2 = \frac{|[\vec{u_1}, \vec{u_2}, \overrightarrow{A_1A_2}]|}{\|\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}\|}.$$

Exercice 4.20. Déterminer la perpendiculaire commune aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ si elle existe dans les deux cas suivants :

1. $\mathscr{D}_1$ est donnée par les équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$
   $\mathscr{D}_2$ est donnée par les équations implicites $\begin{cases} 3x + 2y + 4z + 8 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$
2. $\mathscr{D}_1$ est donnée par les équations implicites $\begin{cases} x + z = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.
   $\mathscr{D}_2$ est donnée par les équations implicites $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Exercice 4.21. *Deux formules*
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On veut montrer la formule

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} \tag{3}$$

1. Montrer que la formule est vraie si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. On suppose donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
   Ainsi $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base de l'espace.
   Expliquer pourquoi il suffit de montrer la fromule dans le cas où $\vec{w} = \vec{u}$.
   Soit $\vec{v'} = \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$.

3. Montrer que $\vec{v'} \cdot \vec{u} = 0$ et que $(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v'}}{\|\vec{v'}\|}, \frac{\vec{u}\wedge\vec{v'}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v'}\|})$ est une base orthonormale directe.
   En déduire que $(\vec{u} \wedge \vec{v'}) \wedge \vec{u} = \|\vec{u}\|^2\vec{v'}$.
   En déduire la formule (3) dans le cas où $\vec{w} = \vec{u}$.
4. Déduire de la formule (3), la formule suivante appelée formule de Jacobi :
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$