Examen 2

Exercice I : graphes et fonctions continues

1. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=|y|\}$ est-il le graphe d'une fonction ?
2. Montrer que l'ensemble $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y+x=|x|\}$ est le graphe d'une fonction (que l'on notera f dans la suite), dont on donnera une expression simple ainsi que le domaine de définition.
3. Étant donnés $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, rappeler les inégalités reliant les quantités : $\big||y_1|-|y_2|\big|$, $|y_1-y_2|$ et $|y_1|+|y_2|$.
4. Montrer qu'il existe une constante C telle que :
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ ,\ \big|f(x_1)-f(x_2)\big| \leq C \cdot |x_1-x_2|.$$
5. En déduire que la fonction f est continue (en utilisant la définition "avec des ε" de la limite d'une fonction).

Exercice II : calcul explicite d'une somme
Montrer l'assertion suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

Exercice III : nombres complexes
On considère le nombre complexe : $z = -\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) + i \cdot \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$. L'objectif est de donner l'écriture exponentielle de z.

1. Calculer le module de z.
2. Calculer z^2 et l'écrire sous forme exponentielle (on rappelle que $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$ et que $\sin(5\pi/6) = 1/2$).
3. Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, donner l'ensemble des racines n-èmes de $\rho e^{i\theta}$.
4. Déduire des questions précédentes l'expression de z sous forme exponentielle (on rappelle que la fonction cos est positive sur $[-\pi/2; \pi/2]$ et négative sur $[\pi/2; 3\pi/2]$).

Exercice IV : racines de polynôme à coefficients complexes
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation polynomiale :

$$(1+i)X^2 + X - (2+i) = 0.$$

Exercice V : formule de Moivre et formules d'Euler

1. Rappeler la formule de Moivre et les formules d'Euler.
2. Exprimer $\cos(4x)$ comme un polynôme en $\cos(x)$.
3. Linéariser $\cos^2(x) \cdot \sin^3(x)$.

Exercice VI : espaces vectoriels
On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$, muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire suivantes :

– addition :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) & \mapsto & (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \end{array}$$

– multiplication par un scalaire :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\lambda, (x, y, z)) & \mapsto & (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \end{array}$$

Muni de ces opérations, on rappelle que $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3.
On considère la famille de vecteurs $\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right)$ définie par :

$$\vec{u_1} = (1,1,1) \quad , \quad \vec{u_2} = (1,2,3) \quad \text{et} \quad \vec{u_3} = (1,3,2).$$

1. Rappeler la définition du fait que la famille $\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les combinaisons linéaires suivantes :
   (a) $\vec{v_1} = 5 \cdot \vec{u_1} - \vec{u_2} - \vec{u_3}$;
   (b) $\vec{v_2} = -\vec{u_1} - \vec{u_2} + 2 \cdot \vec{u_3}$;
   (c) $\vec{v_3} = -\vec{u_1} + 2 \cdot \vec{u_2} - \vec{u_3}$.
3. Soit $\vec{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimer $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ précédents.
4. Déduire des questions précédentes que la famille $\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right)$ est génératrice.
5. La famille $\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right)$ est-elle libre ? Est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?