Examen 1

Exercice I : table de vérité
Soient P, Q et R des assertions.

1. À l'aide d'une table de vérité, montrer qu'on a l'équivalence tautologique :

$$((P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \vee R)).$$

2. En utilisant les règles usuelles sur les opérateurs logiques, retrouver le résultat précédent.

Exercice II : fonctions et quantificateurs

1. Pour chacune des assertions suivantes, décrire le plus simplement possible (en le justifiant brièvement) l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :
   (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y$;
   (b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$;
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = y$;
   (d) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
2. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$, dire s'il s'agit d'un graphe d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. S'il s'agit d'un graphe, on se contentera de donner le domaine de définition et une expression simple de f, tandis qu'on donnera une démonstration s'il ne s'agit pas d'un graphe.
   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + x + 1 = 0\}$;
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 = x\}$;
   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + (x + 1)^2 = 1\}$;
   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + (x + 1)^2 = 1 \text{ et } y \geq 0\}$.

****Exercice III : images directes et images réciproques**
On considère E et F des ensembles, f une application de E dans F, A, A' deux parties de E et B, B' deux parties de F.

1. Rappeler les définitions des ensembles $f(A)$ et $f^{-1}(B)$ (qu'on présentera comme des sous-ensemble de E ou F dont les éléments vérifient une assertion).
2. Montrer que l'on a l'inclusion :

$$f(A \cap A') \subset (f(A) \cap f(A')).$$

3. Donner un contre-exemple pour montrer que l'on n'a pas l'autre inclusion en général (on pourra par exemple considérer le cas où f est constante, et où A et A' sont non vides tels que $A \cap A' = \emptyset$).
4. On suppose que f est injective. Montrer qu'on a alors l'égalité :
$$f(A \cap A') = (f(A) \cap f(A')) .$$
5. Montrer que l'on a l'égalité :
$$f^{-1}(B \cap B') = \left(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')\right) .$$

***Exercice IV : applications injectives, surjectives ou bijectives**

On se donne E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G.

1. Rappeler la définition de l'application $g \circ f$.
2. Montrer l'implication suivante :
$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective.}$$
3. Montrer l'implication suivante :
$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.}$$
4. On suppose qu'il existe une application h de F dans E telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est bijective. On pourra admettre que les applications Id_E et Id_F sont bijectives.
5. L'assertion réciproque est-elle vraie ?

****Exercice V : limites et fonctions continues**

On se propose de montrer que toute fonction polynomiale est continue. Plus précisément, on se propose de montrer que, pour tout entier d et tous réels $a_0, \ldots, a_d$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_{d-1} \cdot x^{d-1} + a_d \cdot x^d$$
est continue.

1. Montrer que, pour tout réel a, la fonction constante de valeur a (c'est-à-dire la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a$) est continue. Pour cela, on utilisera directement la définition de la limite introduite en cours.
2. Montrer que la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) = x$) est continue. Là encore, on utilisera directement la définition de la limite introduite en cours.
3. Montrer que, pour tout réel a et tout entier d, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = a \cdot x^d$ est continue. On pourra avoir recours à un raisonnement par récurrence.
4. À l'aide des opérations usuelles sur les fonctions qui préservent la continuité, en déduire que la fonction f définie en début d'exercice est continue.