Examen

8 janvier 2019. Durée 2h00.

Pour les exercices 1 à 5, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{R}_+^*$ *l'ensemble des nombres réels strictement positifs.*

Question de cours. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 dont on fixe une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Donner les formules pour les coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs de E.

Exercice 1. Soient E et F des ensembles. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Soit A une partie de E. Donner la définition de l'ensemble $f(A)$.
2. Soit B une partie de F. Donner la définition de l'ensemble $f^{-1}(B)$.
3. Soit A une partie de E. Démontrer l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$.
4. On suppose que l'application f est *injective*. Démontrer que, pour tout élément $x \in E$, on a l'implication
$$f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A.$$
Que peut-on en déduire pour l'ensemble $f^{-1}(f(A))$ dans ce cas ?
5. On suppose maintenant que l'application f *n*'est *pas* injective. Démontrer qu'il existe deux éléments distincts x_1 et x_2 de E tels que
$$x_2 \in f^{-1}(f(\{x_1\})).$$
6. On note $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Déduire des questions précédentes que l'application f est injective si et seulement si elle vérifie :
$$\forall A \in \mathfrak{P}(E), \quad A = f^{-1}(f(A)).$$

Exercice 2. On considère l'application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par
$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \begin{cases} t\cos\left(\frac{1}{t}\right) \text{ si } t \neq 0, \\ 0 \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

1. Prouver que
$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |f(t)| \leqslant |t|.$$

2. Démontrer que f admet une limite en 0.
3. Déterminer l'ensemble
$$A = \left\{ t \in \mathbf{R}_+^* \,\middle|\, \cos\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \right\}.$$
4. Déterminer l'ensemble
$$B = \left\{ t \in \mathbf{R}_+^* \,\middle|\, \cos\left(\frac{1}{t}\right) = -1 \right\}.$$
5. Démontrer que pour tout $\eta \in \mathbf{R}_+^*$, il existe un élement a de A et un élément b de B tels que
$$0 < a < \eta \quad \text{et} \quad 0 < b < \eta.$$
(On pourra utiliser sans le démontrer le fait que pour tout nombre réel x il existe un unique entier relatif, noté $\lfloor x \rfloor$ tel que
$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$
Cet entier s'appelle la *partie entière de* x.)
6. À l'aide des questions précédentes, prouver que l'application f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on définit
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k}{n+1}.$$

1. Calculer les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, donner une expression simple pour u_n.

Exercice 4. Dans cet exercice, $\mathrm{i} \in \mathbf{C}$ vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.

1. Justifier l'égalité
$$|-7 + 24\mathrm{i}| = 25.$$
2. Trouver les deux racines carrées du nombre complexe $-7 + 24\mathrm{i}$.
3. Déduire de la question précédente les solutions complexes de l'équation
$$z^2 + z + 2 - 6\mathrm{i} = 0.$$

Exercice 5. Dans cet exercice, on se place dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$ de repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Toutes les coordonnées sont exprimées dans ce repère. On considère les points A de coordonnées $(1, 2)$, B de coordonnées $(-1, 1)$ et C de coordonnées $(3, 0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Donner une équation implicite de la droite $\mathscr{D}$ passant par les points A et B.
3. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

4. Donner la distance du point C à la droite $\mathscr{D}$.
5. Soit G un point de coordonnées (x_G, y_G). Donner les coordonnées du vecteur
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}.$$
6. Démontrer qu'il existe un unique point G du plan tel que
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$
et donner ses coordonnées.
7. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y). Exprimer la somme de carrés de distances
$$AM^2 + BM^2 + CM^2$$
en termes des coordonnées x et y.
8. On considère l'ensemble
$$\mathscr{C} = \{ M \in \mathscr{P} \mid AM^2 + BM^2 + CM^2 = 13 \}.$$
Démontrer que $\mathscr{C}$ est un cercle de centre G et contenant le point A ; donner son rayon.