Exercice autour le partie entière

Étant donné $x \in \mathbb{R}$, on définit la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, comme le plus grand entier inférieur ou égal à x.

I. Montrer les propriétés suivantes :

1. pour tout réel x : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$;
2. pour tout réel x et tout entier n : $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$;
3. pour tout entier n : $\lfloor n \rfloor = n$;
4. pour tout réel x, si x n'est pas un entier, alors : $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

II. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Dire si l'application f est :

1. injective ;
2. surjective ;
3. bijective.

III. Donner deux sous-ensembles E, F de $\mathbb{R}$, les plus grands possibles (et les plus simples possibles de préférence), tels que $f : E \to F$ est bijective.

Solution :

I.1. Par définition, on a déjà l'inégalité : $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Pour l'autre inégalité, raisonnons par l'absurde. Supposons que l'on ait : $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x$ (qui est bien la négation de la proposition cherchée). Alors, l'entier $\lfloor x \rfloor + 1$ est inférieur ou égal à x mais est strictement plus grand que $\lfloor x \rfloor$, ce qui contredit la définition de $\lfloor x \rfloor$. D'où la contradiction.

I.2. On utilise le résultat précédent, à savoir la double inégalité : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

En remplaçant x par $x + n$, on obtient : $\lfloor x + n \rfloor \leq x + n < \lfloor x + n \rfloor + 1$.

En additionnant n à la première inégalité, on obtient : $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < (\lfloor x \rfloor + n) + 1$.

En regroupant ces inégalités, on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lfloor x + n \rfloor & < & \lfloor x \rfloor + n + 1 \\ \lfloor x \rfloor + n & < & \lfloor x + n \rfloor + 1 \end{array} \right. .$$

Comme toutes les quantités ci-dessus sont des entiers, on peut remplacer les inégalités strictes en inégalités larges, en faisant diminuant de 1 les quantités à droite, et on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lfloor x + n \rfloor & \leq & \lfloor x \rfloor + n \\ \lfloor x \rfloor + n & \leq & \lfloor x + n \rfloor \end{array} \right. .$$

Et on a finalement l'égalité cherchée : $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

I.3. On a les inégalités $n \leq n < n+1$, ce qui conclut directement que $\lfloor n \rfloor = n$.

I.4. On utilise les inégalités du I.1. appliquées à x et $-x$. Le fait que x est non entier (et donc que $-x$ est non entier) se traduit par le fait que les inégalités qui apparaissent sont toutes strictes :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lfloor x \rfloor & < & x & < & \lfloor x \rfloor + 1 \\ \lfloor -x \rfloor & < & -x & < & \lfloor -x \rfloor + 1 \end{array} \right. .$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor < 0 < \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor + 2$$

que l'on préfère écrire :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor < 0 \quad \text{et} \quad 0 < \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor + 2.$$

Et comme toutes les quantités ci-dessus sont des entiers, on a finalement :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \leq -1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor + 1$$

et donc l'égalité cherchée, à savoir : $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

On aurait pu procéder par une autre méthode, et calculer directement $\lfloor -x \rfloor$. Cette méthode ressemble davantage à ce que l'on a fait au point 2. On obtient en effet les inégalités :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} -\lfloor x \rfloor - 1 & < & -x & < & -\lfloor x \rfloor \\ \lfloor -x \rfloor & < & -x & < & \lfloor -x \rfloor + 1 \end{array} \right. .$$

On déduit ensuite $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$, qui donne le résultat voulu.

II.1. Comme la partie entière de x satisfait : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, alors, pour tout entier n, on a l'équivalence :

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1.$$

Autrement dit, la fonction f est constante sur tous les intervalle de la forme $[n; n+1[$, et n'est donc pas injective.

Pour aller plus vite, on peut se contenter de dire que $f(0) = f(1/2) = 0$, donc 0 a au moins deux antécédents par f, et f n'est pas injective.

II.2. Pour la surjectivité, il suffit de dire que la partie entière d'un réel est toujours un entier. En particulier, tout réel qui n'est pas entier ne possède aucun antécédent par f, donc f n'est pas surjective.

II.3. L'application f n'étant ni injective ni surjective, elle n'est évidemment pas bijective.

III. Déterminons d'abord l'ensemble F. Pour cela, on calcule l'image de f. Comme la partie entière d'un réel est un entier, on a déjà l'inclusion $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$. Ensuite, comme tout entier n vérifie $f(n) = n$, alors tout entier a un antécédent par f (à savoir lui-même) donc $\mathbb{Z} \subset f(\mathbb{R})$. Et on a ainsi l'égalité $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$.

Comme on cherche F le plus grand possible, alors nécessairement $F = f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$.

Calculons maintenant l'ensemble E. On le souhaite le plus grand possible, c'est-à-dire que tout élément de F doit avoir exactement un antécédent dans E.

Donnons-nous $n \in F = \mathbb{Z}$. On a : $f^{-1}(n) = [n; n+1[$. Ainsi, l'ensemble E doit avoir un (et un seul) élément dans tout intervalle de la forme $[n; n+1[$.

L'ensemble $E = \mathbb{Z}$ convient. On aurait pu prendre d'autres ensembles un peu plus compliqué, comme donnés ci-dessous en guise d'exemple :

$$\begin{gathered}
\{n + 1/2, n \in \mathbb{Z}\} \\
\left\{n + \frac{1}{\pi}, n \in \mathbb{Z}\right\} \\
\left\{n + \frac{1}{2+n^2}, n \in \mathbb{Z}\right\} \\
\left\{n + \frac{1+(-1)^n}{3}, n \in \mathbb{Z}\right\} \\
\dots
\end{gathered}$$