Université Grenoble–Alpes **Mat101 2018/2019**

Examen 2

Exercice I : graphes et fonctions continues

1. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=|y|\}$ n'est pas un graphe car les points $(0,1)$ et $(0,0)$ appartiennent à l'ensemble considéré, et ont même abscisse mais des ordonnées différentes.
2. Étant donné $(x,y) \in \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y+x=|x|\}$, on a $y=|x|-x$, donc à x fixé on a une unique valeur possible pour y. L'ensemble Γ est donc le graphe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = |x| - x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$
3. Étant donnés $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, on a les inégalités :
$$\big||y_1|-|y_2|\big| \leq |y_1-y_2| \leq |y_1|+|y_2|.$$
4. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} \big|f(x_1)-f(x_2)\big| &= \big||x_1|-x_1-|x_2|+x_2\big| \\ &\leq \big||x_1|-|x_2|\big| + |x_1-x_2|. \\ &\leq 2 \cdot |x_1-x_2 \end{aligned}$$
Donc $C=2$ convient.
5. Pour montrer que la fonction est continue, on vérifie qu'elle admet une limite en tout $x_1 \in \mathbb{R}$.
Soit $x_1 \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$. On a :
$$\forall x_2 \in \mathbb{R},\ \big|f(x_1)-f(x_2)\big| \leq 2|x_1-x_2|.$$
En particulier, en posant $\eta = \varepsilon/2$, on a l'implication :
$$\forall x_2 \in \mathbb{R},\ |x_1-x_2| \leq \eta \Rightarrow \big|f(x_1)-f(x_2)\big| \leq \varepsilon.$$
Donc la fonction f admet une limite en tout $x_1 \in \mathbb{R}$: elle est continue.

Exercice II : calcul explicite d'une somme

Procédons par récurrence. Notons pour simplifier $P(n)$ l'assertion :
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$
Initialisation : pour $n=0$, on a :

— $\sum_{k=0}^{0} k \cdot 2^k = 0$;
— $(0-1) \cdot 2^{0+1} + 2 = -2 + 2 = 0$.
Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k \cdot 2^k &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\
&= (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 + (n+1) \cdot 2^{n+1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= 2n \cdot 2^{n+1} + 2 \\
&= ((n+1)-1) \cdot 2^{(n+1)+1} + 2.
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

D'où la récurrence.

Exercice III : nombres complexes

On pose $z = -\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) + i \cdot \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = a + i \cdot b$.

1. On a :
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2.$$

2. On a :
$$z^2 = (a^2 - b^2) + i \cdot 2ab = -2\sqrt{3} - i \cdot 2.$$
Comme $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$ et $\sin(5\pi/6) = 1/2$, on a donc :
$$z^2 = 4 \cdot e^{-i \cdot \frac{5\pi}{6}} = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{6}}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les racines n-èmes de $\rho e^{i\theta}$ sont les :
$$\rho^{1/n} e^{i \cdot \frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \text{ pour } k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

4. Comme z est une racine de z^2, alors on déduit de la question précédente que :
$$z = 2e^{i \cdot \frac{7\pi}{12}} \text{ ou } z = 2e^{i \cdot \frac{19\pi}{12}}.$$
On utilise que $\cos(7\pi/12) \leq 0$, et que $a \leq 0$, pour conclure finalement que :
$$z = 2e^{i \cdot \frac{7\pi}{12}}.$$

Exercice IV : racines de polynôme à coefficients complexes
On considère le polynôme :

$$(1+i)X^2 + X - (2+i) = 0.$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 1^2 + 4 \cdot (1+i) \cdot (2+i) = 5 + i \cdot 12.$$

Les racines carrées de Δ sont de la forme $x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 5 \\ 2xy & = & 12 \\ x^2 + y^2 & = & 13 \end{cases}$$

(où les égalités sont obtenues en regardant la partie réelle, la partie imaginaire, et le module de chaque membre de l'égalité $(x+iy)^2 = \Delta$).

On trouve finalement $(x+iy) = \pm(3 + i \cdot 2)$.

Les racines de l'équation polynomiale considérées sont donc :

$$\frac{-1-(3+i\cdot 2)}{2\cdot(1+i)} = \frac{3}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \text{ et } \frac{-1+(3+i\cdot 2)}{2\cdot(1+i)} = 1.$$

Exercice V : formule de Moivre et formules d'Euler

1. On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :
   — Formule de Moivre : $\cos(nx) + i \cdot \sin(nx) = (\cos(x) + i \cdot \sin(x))^n$;
   — Formules d'Euler : $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.
2. La formule de Moivre (avec $n = 4$) donne :

$$\begin{aligned} \cos(4x) &= \mathrm{Re}\left((\cos(x) + i \cdot \sin(x))^4\right) \\ &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) \\ &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1-\cos^2(x)) + (1-\cos^2(x))^2 \\ &= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1. \end{aligned}$$

3. Les formules d'Euler donnent :

$$\begin{aligned} \cos^2(x)\cdot\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{-1}{32\cdot i}\left[(e^{2ix}+2+e^{-2ix})(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix})\right] \\ &= \frac{-1}{32\cdot i}\left[(e^{5ix}-e^{-5ix}) - (e^{3ix}-e^{-3ix}) - 2\cdot(e^{ix}-e^{-ix})\right] \\ &= -\frac{\sin(5x)}{16} + \frac{\sin(3x)}{16} + \frac{\sin(x)}{8}. \end{aligned}$$

Exercice VI : espaces vectoriels

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$, muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire usuelles (qui font de $\mathbb{R}^3$ un espace vectoriel de dimension 3).

On considère la famille de vecteurs $\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right)$ définie par :

$$\vec{u_1} = (1,1,1) \quad , \quad \vec{u_2} = (1,2,3) \quad \text{et} \quad \vec{u_3} = (1,3,2).$$

1. La famille $\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ si tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right)$. C'est-à-dire :

$$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \ \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \ \vec{w} = \lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2} + \lambda_3 \vec{u_3}.$$

2. On a :
   (a) $\vec{v_1} = 5 \cdot \vec{u_1} - \vec{u_2} - \vec{u_3} = (5,5,5) + (-1,-2,-3) + (-1,-3,-2) = (3,0,0)$;
   (b) $\vec{v_2} = -\vec{u_1} - \vec{u_2} + 2 \cdot \vec{u_3} = (-1,-1,-1) + (-1,-2,-3) + (2,6,4) = (0,3,0)$;
   (c) $\vec{v_3} = -\vec{u_1} + 2 \cdot \vec{u_2} - \vec{u_3} = (-1,-1,-1) + (2,4,6) + (-1,-3,-2) = (0,0,3)$.
3. Soit $\vec{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a directement l'égalité :

$$\vec{w} = \frac{x}{3}\vec{v_1} + \frac{y}{3}\vec{v_2} + \frac{z}{3}\vec{v_3}.$$

4. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{x}{3}\vec{v_1} + \frac{y}{3}\vec{v_2} + \frac{z}{3}\vec{v_3} \\ &= \frac{x}{3}\left(5 \cdot \vec{u_1} - \vec{u_2} - \vec{u_3}\right) + \frac{y}{3}\left(-\vec{u_1} - \vec{u_2} + 2 \cdot \vec{u_3}\right) + \frac{z}{3}\left(-\vec{u_1} + 2 \cdot \vec{u_2} - \vec{u_3}\right) \\ &= \frac{5x - y - z}{3} \cdot \vec{u_1} + \frac{-x - y + 2z}{3} \cdot \vec{u_2} + \frac{-x + 2y - z}{3} \cdot \vec{u_3}. \end{aligned}$$

   Ainsi, la famille $\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right)$ est génératrice (elle vérifie directement la définition, avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(\frac{5x-y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}\right)$).
5. La famille $\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right)$ est de cardinal 3, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. On a donc l'équivalence suivante :

$$\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right) \text{ est libre } \Leftrightarrow \left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right) \text{ est génératrice } \Leftrightarrow \left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right) \text{ est une base .}$$

   Comme la famille $\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right)$ est génératrice (d'après la question précédente), alors elle est libre et c'est une base.